



## ESTRATÉGIAS DE INVERSÃO DE MULTIPARÂMETROS UTILIZANDO A EQUAÇÃO COMPLETA DA ELASTODINÂMICA

Marília da Silva Ramos Carneiro

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientador: Luiz Landau

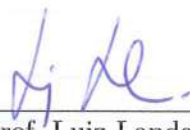
Rio de Janeiro  
Agosto de 2017

ESTRATÉGIAS DE INVERSÃO DE MULTIPARÂMETROS UTILIZANDO A  
EQUAÇÃO COMPLETA DA ELASTODINÂMICA

Marília da Silva Ramos Carneiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:



Prof. Luiz Landau, D.Sc.



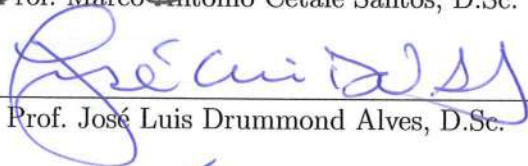
Dr. Djalma Manoel Soares Filho, D.Sc.



Dr. André Bulcão, D.Sc.



Prof. Marco Antonio Cetale Santos, D.Sc.



Prof. José Luis Drummond Alves, D.Sc.



Prof. José Abdalla Helayel Neto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
AGOSTO DE 2017

Carneiro, Marília da Silva Ramos

Estratégias de Inversão de Multiparâmetros Utilizando a Equação Completa da Elastodinâmica/Marília da Silva Ramos Carneiro. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XVIII, 141 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Luiz Landau

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2017.

Bibliography: p. 107 – 114.

1. inversão sísmica. 2. elasticidade. 3. Full waveform inversion. I. Landau, Luiz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Landau, pela confiança e oportunidade.

Ao meu co-orientador, Dr. Djalma, pela inspiração, incentivo, conselhos e propostas para esta tese.

À minha família, especialmente aos meus pais, Márcia e Antônio, aos meus irmãos, Maria Clara e Henrique e às minhas avós Sirinha e Tetê.

Ao Bruno Pereira Dias pelo amor, carinho, encorajamento e por toda sua contribuição para realização deste trabalho.

À Luana Osório por sua amizade, ajuda e apoio durante este doutorado.

Ao Felipe Duarte, por sua contribuição na implementação dos códigos.

Aos colegas do Lab2M Josias Silva, Márcio Araújo, Bruno Souza, Carlos Henrique pelas contribuições e colaborações nas implementações dos códigos desenvolvidos.

Aos amigos que, independente do tempo ou da frequência, continuam amigos: Sannie Brum, Luana Jorge, Carla Oliveira, André Nicolai, Rafael Oliveira, Gustavo Pinheiro, Rafael Aranha, Diogo Buarque, Nelson Prado, Fernanda Rodrigues, Carolina Rodrigues.

Aos amigos da CGG: Ségolène Dega, Jaqueline Krueger, Joan Manrique, Vincent Belz, Bernardo Quijano, Denis Lage e Wilson Duarte.

Aos doutores André Bulcão e Gustavo Catão, aos professores José Abdalla Hel-laýel Neto, Marco Antonio Cetale Santos e José Luis Drummond Andrade, pelas críticas construtivas que ajudaram a melhorar esta tese.

Ao Programa Petrobras de Formação de Recursos Humanos, pelo auxílio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## ESTRATÉGIAS DE INVERSÃO DE MULTIPARÂMETROS UTILIZANDO A EQUAÇÃO COMPLETA DA ELASTODINÂMICA

Marília da Silva Ramos Carneiro

Agosto/2017

Orientador: Luiz Landau

Programa: Engenharia Civil

Esta tese propõe uma nova metodologia para direções de atualizações de multiparâmetros elásticos para o método de inversão FWI (em inglês *full waveform inversion* – FWI) utilizando as propriedades de reparametrização da Hessiana aproximada, para assegurar que as direções de atualização de parâmetros sejam adequadamente escaladas, além de manter as unidades apropriadas do problema.

Este estudo também aborda aplicações dos métodos de otimização locais para o caso 2D acústico isotrópico: gradiente-descendente, dois métodos de gradientes conjugados (Polak-Ribière e Fletcher-Reeves) e o l-BFGS (quasi-Newton). Esta análise reafirma que o método l-BFGS, que faz aproximações da Hessiana iterativamente, é o que melhor estima o modelo resultante, além de convergir mais rapidamente para um modelo satisfatório. Também, avalia-se o impacto nos modelos de velocidades resultantes da inversão acústica utilizando dados sintéticos acústicos e elásticos. Os resultados mostram que a inversão acústica não é suficientemente acurada em ajustar as amplitudes quando se utiliza dados gerados além da aproximação acústica. Por fim, é explorado o uso de multicomponentes 3C/2D (hidrofone, componentes vertical e horizontal do geofone) com FWI elástico. Analisa-se os efeitos nos modelos resultantes das inversões dependendo das combinações das componentes dos dados de entrada. Conclui-se que, ao se utilizar dados de entrada elástico para o FWI, a componente hidrofone é a recomendada se a inversão for monoparâmetro para velocidade compressional acústica, e a utilização de todas as componentes registradas, quando a inversão for multiparâmetro elástica. Além disso, os modelos obtidos são mais acurados quando se considera inversão de multiparâmetros.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## MULTIPARAMETERS STRATEGIES USING THE ELASTODINAMIC EQUATIONS IN FULL WAVEFORM INVERSION

Marília da Silva Ramos Carneiro

August/2017

Advisor: Luiz Landau

Department: Civil Engineering

This thesis proposes a new methodology for the update directions for the elastic multiparameters full waveform inversion (FWI), by using the approximate Hessian reparametrization properties, to ensure that the parameters update directions are properly scaled, and also keeping proper physical units of the problem.

This study also includes applications of the following local optimization methods to the 2D isotropic acoustic case: steepest-descent, two conjugated-gradients (Polak-Ribière and Fletcher-Reeves) and the l-BFGS (Quasi-Newton). This analysis reinforces that the l-BFGS method, which makes Hessian approximations iteratively, is the one that better estimates the resulting model, besides converges faster to a satisfactory model. Also, it is evaluated the impact of the velocity models resulted from the acoustic inversions by using acoustic or elastic synthetic data. The results shows that the acoustic inversion is not sufficiently accurate to adjust the amplitudes of elastically generated data. Finally, it is explored the use of 3C/2D multicomponent (hydrophone and vertical and horizontal components of geophone) with elastic FWI. It is analyzed the effects on the inversion model results depending on the input data combination. It is concluded that whereas the input data to the FWI is elastic, the hydrophone only is the best choice if the inversion is monoparameter to the acoustic compressional velocity, and the use of all components registered are recommended when the inversion is elastic multiparameter. Furthermore, the obtained models are more accurate when the multiparameter inversion is considered.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Estrutura da tese . . . . .	3
1.2 Ferramental . . . . .	4
<b>2 O método de inversão FWI</b>	<b>6</b>
2.1 Introdução . . . . .	6
2.2 Problemas direto e inverso . . . . .	6
2.3 Formulação FWI . . . . .	8
2.4 Método de estado Adjunto . . . . .	9
2.5 Métodos locais de otimização . . . . .	11
2.6 Custo computacional e não unicidade . . . . .	13
<b>3 Estudo dos métodos de otimização locais</b>	<b>14</b>
3.1 Introdução . . . . .	14
3.2 Método do gradiente-descendente (SD) . . . . .	14
3.3 Métodos de Newton e Gauss-Newton (GN) . . . . .	14
3.4 Método quasi-Newton (l-BFGS) . . . . .	16
3.5 Métodos gradiente-conjugados (CG) . . . . .	18
3.6 Busca Linear . . . . .	19
3.7 Aplicações numéricas . . . . .	21
3.7.1 Modelagem . . . . .	21
3.7.2 Inversão . . . . .	23
3.7.3 Resultados . . . . .	25
3.8 Conclusão . . . . .	30
<b>4 Inversão acústica de dados acústico e elástico</b>	<b>33</b>
4.1 Introdução . . . . .	33
4.2 Aplicações numéricas . . . . .	34

4.2.1	Modelagem . . . . .	35
4.2.2	Inversão . . . . .	42
4.2.3	Resultados . . . . .	43
4.3	Conclusão . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Proposta de direção de atualização para correção de escala em inversão de multiparâmetros</b>	<b>49</b>
5.1	Introdução . . . . .	49
5.2	Direção de atualização baseada no gradiente . . . . .	50
5.3	Direção de atualização baseada na Hessiana aproximada e pseudo-Hessiana . . . . .	51
5.4	Aplicação para o caso acústico . . . . .	55
5.4.1	Formulação . . . . .	55
5.4.2	Quadrado da vagarosidade da onda P . . . . .	56
5.4.3	Velocidade da onda P . . . . .	57
5.4.4	Precondicionamento da diagonal da pseudo-Hessiana . . . . .	57
5.4.5	Aplicação numérica: modelo Marmousi-2 acústico . . . . .	58
5.5	Aplicação para o caso elástico . . . . .	62
5.5.1	Formulação . . . . .	62
5.5.2	Gradientes elásticos isotrópicos 2D . . . . .	64
5.5.3	Metodologia convencional para obtenção de direções de atualização: transformação de base de parâmetros baseada no gradiente . . . . .	65
5.5.4	Metodologia proposta para obtenção de direções de atualização: transformação de base de parâmetros baseada no inverso da Hessiana aproximada . . . . .	66
5.5.5	Aplicação numérica: Modelo com perturbações . . . . .	67
5.5.6	Aplicação numérica: Modelo Marmousi-2 elástico . . . . .	71
5.6	Conclusões . . . . .	76
<b>6</b>	<b>FWI elástico usando dados de multicomponentes</b>	<b>77</b>
6.1	Introdução . . . . .	77
6.2	Aplicação numérica . . . . .	79
6.2.1	Modelagem . . . . .	79
6.2.2	Inversão . . . . .	85
6.3	Discussão dos resultados . . . . .	87
6.3.1	Resultados de inversão de monoparâmetro . . . . .	87
6.3.2	Categoria 2: inversão simultânea para dois parâmetros . . . . .	92
6.3.3	Categoria 3: inversão simultânea para três parâmetros . . . . .	97
6.3.4	Erro relativo . . . . .	99



6.4	Conclusão . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>104</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Introdução ao Método Sísmico</b>	<b>115</b>
<b>B</b>	<b>Modelagem Sísmica Computacional da Equação da Onda pelo Mé-</b> <b>todo das Diferenças Finitas</b>	<b>119</b>
B.1	Introdução . . . . .	119
B.1.1	Termo fonte . . . . .	120
B.1.2	Condições de dispersão e estabilidade . . . . .	121
B.1.3	Condições de contorno e de borda . . . . .	122
B.2	Modelagens no domínio do tempo . . . . .	122
B.2.1	Modelagem elástica . . . . .	123
B.2.2	Modelagem acústica . . . . .	125
B.3	Modelagem acústica no domínio da frequência . . . . .	127
B.3.1	Equação da onda acústica (meio isotrópico): . . . . .	127
<b>C</b>	<b>Transformação de propriedades da Hessiana completa</b>	<b>129</b>
<b>D</b>	<b>Caso elástico isotrópico 3D</b>	<b>130</b>
<b>E</b>	<b>Parâmetros e resultados complementares do Capítulo 6</b>	<b>132</b>
E.1	Tabelas dos 75 casos de inversão . . . . .	132
E.2	Resultados monoparâmetros . . . . .	136

# Lista de Figuras

2.2.1 Esquema da relação entre o modelo de parâmetros $\mathbf{p}$ e o dado medido $\mathbf{d}$ . . . . .	7
2.5.1 Gráfico ilustrando o problema de mínimos locais. A função objetivo possui mínimos locais devido à relação não linear entre o operador direto $\mathbf{L}$ e o modelo $\mathbf{p}$ . Figura modificada de MA [40]. . . . .	12
3.6.1 Representação bidimensional da função objetivo $E(\mathbf{p})$ , da atualização do modelo $\mathbf{p}_{k+1}$ e da busca linear $\alpha$ . . . . .	19
3.7.1 Modelo de velocidades Marmousi. O reservatório está localizado a uma profundidade de 1600 metros. . . . .	22
3.7.2 Modelos iniciais utilizados para a inversão por FWI. Em (a) encontra-se o modelo 1, que é uma versão do modelo verdadeiro suavizada com 50 pontos nas direções vertical e horizontal. Em (b) encontra-se o modelo 2, que é considerado um modelo 1D, que é obtido a partir do perfil de velocidade em profundidade situado na posição horizontal $x = 2880$ m do modelo apresentado na Figura 3.7.1. . . . .	24
3.7.3 Resultados dos modelos estimados utilizando o modelo inicial do caso 1. Em (a) gradiente-descendente; (b) gradiente-conjugado de Polak-Ribière; (c) gradiente-conjugado de Fletcher-Reeves; (d) Quasi-Newton. . . . .	26
3.7.4 Resultados dos modelos estimados utilizando o modelo inicial do caso 2. Em (a) gradiente-descendente; (b) gradiente-conjugado de Polak-Ribière; (c) gradiente-conjugado de Fletcher-Reeves; (d) Quasi-Newton. . . . .	27
3.7.5 Variação da função objetivo com relação ao número de iterações para todos os métodos de otimização. Em (a) com o modelo inicial do caso 1 e em (b) com o modelo inicial do caso 2. . . . .	29
3.7.6 Perfis de velocidade para o modelo inicial 1. Perfis de velocidades extraídos do ponto da direção do afastamento 4968 metros do modelo alvo. Em todos os perfis estão o modelo verdadeiro, sendo em (a) com gradiente-descendente, em (b) Polak-Ribière, em (c) Fletcher-Reeves e, em (d) quasi-Newton. . . . .	31

3.7.7 Perfis de velocidade para o modelo inicial 2. Perfis de velocidades extraídos do ponto da direção do afastamento 4968 metros para o modelo do caso 2. Em todos os perfis estão o modelo verdadeiro. Sendo em (a) o gradiente-descendente, em (b) Polak-Ribière, em (c) Fletcher-Reeves e, em (d) quasi-Newton. . . . .	32
4.1.1 Modos de conversão das ondas P e S. . . . .	34
4.1.2 Refletividade P-P para meios (a) acústico e (b) elástico. . . . .	35
4.2.1 O modelo verdadeiro Marmousi 2. Em (a) modelo de velocidade onda-P, em (b) modelo de velocidade onda-S e, em (c) modelo de densidade. . . . .	37
4.2.2 Sismogramas dos dados acústicos. Em cada sismograma as frequências de corte máximas foram: em (a) 8 Hz, em (b)10 Hz, em (c) 12 Hz e em (d) 14 Hz. . . . .	39
4.2.3 Sismogramas dos dados elásticos. Em cada sismograma as frequências de corte máximas foram: em (a) 8 Hz, em (b)10 Hz, em (c) 12 Hz e em (d) 14 Hz. . . . .	40
4.2.4 Diferença entre dado acústico e elástico. Em cada sismograma as frequências máximas foram: em (a) 8 Hz, em (b)10 Hz, em (c) 12 Hz e em (d) 14 Hz. . . . .	41
4.2.5 Em (a) o modelo inicial obtido a partir do modelo alvo de onda-P, suavizado 30 pontos nas direções vertical e horizontal. Resultados da inversão acústica: em (b) com dados de entrada da modelagem acústica e em (c) com dados de entrada da modelagem elástica. . . .	44
4.2.6 Erro relativo entre o modelo verdadeiro e os resultados da inversão. Em (a) é o erro relativo entre o modelo verdadeiro e o resultado da inversão com dado acústico e em (b) o erro relativo entre o modelo verdadeiro e o resultado da inversão com dado elástico. . . . .	45
4.2.7 O comportamento da função objetivo normalizada com relação ao número de iterações. Em (a) a variação da função objetivo com dados de entrada acústico e, em (b) com os dados de entrada elástico. . . .	46
4.2.8 Resultados das migrações utilizando em: (a) modelo exato, (b) modelo inicial, (c) modelo resultante da inversão com dado acústico e (d) modelo resultante da inversão com dado elástico. . . . .	47
5.4.1 O modelo de velocidade Marmousi-2 é dado em (a). O modelo inicial para a inversão é ilustrado em (b). . . . .	59
5.4.2 (a) É o resultado da inversão utilizando a parametrização em $v_p$ . Figura (b), é o resultado para a inversão usando a parametrização em $\sigma$ . . . . .	60

5.4.3 Em (a) o resultado usando o condicionamento com pseudo-Hessiana. Figura (b), é a autocorrelação do campo de onda direto ( $\int_T dt \ddot{u}\ddot{u}$ ) para a última iteração, mostrada na Equação 5.4.11. . . . .	61
5.4.4 O perfil de velocidade para os modelos estimados na posição $x=8.5$ km. . . . .	61
5.5.1 Parâmetro velocidade compressional $v_p$ : (a) modelo verdadeiro com perturbação, (b) modelo de fundo (inicial), (c) resultado da direção de atualização convencional e (d) resultado da direção de atualização pré condicionada pelas transformações do inverso da pseudo-Hessiana (ou Hessiana aproximada). . . . .	68
5.5.2 Parâmetro velocidade cisalhante $v_s$ : (a) modelo verdadeiro com perturbação, (b) modelo de fundo (inicial), (c) resultado da direção de atualização convencional e (d) resultado da direção de atualização pré condicionada pelas transformações do inverso da pseudo-Hessiana (ou Hessiana aproximada). . . . .	69
5.5.3 Parâmetro densidade $\rho$ : (a) modelo verdadeiro com perturbação, (b) modelo de fundo (inicial), (c) resultado da direção de atualização convencional e (d) resultado da direção de atualização pré condicionada pelas transformações do inverso da pseudo-Hessiana (ou Hessiana aproximada). . . . .	70
5.5.4 Velocidade compressional: (a) O modelo verdadeiro (Marmousi-2). (b) Modelo inicial. Em (c) e (d) resultados da inversão utilizando a direção de atualização convencional (pela transformação do Jacobiano transposto), sendo (c) com gradiente-descendente e em (d) com l-BFGS. (e) Inversão utilizando a direção de atualização proposta (pela transformação do Jacobiano inverso). (f) Comparação dos perfis de velocidade através do modelo Marmousi-2 modificado a 3000 m na direção $x$ . . . . .	73
5.5.5 Velocidade cisalhante:(a) O modelo verdadeiro (Marmousi-2). (b) Modelo inicial. Em (c) e (d) resultados da inversão utilizando a direção de atualização convencional (pela transformação do Jacobiano transposto), sendo (c) com gradiente-descendente e em (d) com l-BFGS. (e) Inversão utilizando a direção de atualização proposta (pela transformação do Jacobiano inverso). (f) Comparação dos perfis de velocidade através do modelo Marmousi-2 modificado a 3000 m na direção $x$ . . . . .	74

5.5.6 Densidade: (a) O modelo verdadeiro (Marmousi-2). (b) Modelo inicial. Em (c) e (d) resultados da inversão utilizando a direção de atualização convencional (pela transformação do Jacobiano transposto), sendo (c) com gradiente-descendente e em (d) com l-BFGS. (e) Inversão utilizando a direção de atualização proposta (pela transformação do Jacobiano inverso). (f) Comparação dos perfis de densidade através do modelo Marmousi-2 modificado a 3000 m na direção $x$ . . . . .	75
5.5.7 Comparação das funções objetivos para o método convencional (gradiente-descendente (SD) e l-BFGS) e do método proposto. . . . .	76
6.1.1 Representação esquemática dos sensores contidos em um <i>ocean bottom node</i> para uma aquisição 4C: um hidrofone (componente de pressão $P$ ) e um geofone com três componentes direcionais, sendo $Vz$ , componente vertical, e $Vx$ e $Vy$ componentes horizontais. . . . .	78
6.2.1 Modelos verdadeiros elásticos: em (a) modelo com três cruzeiros indicando perturbação de velocidade compressional $v_p$ ; em (b) modelo com três triângulos indicando perturbação de velocidade cisalhante $v_s$ e; (c) modelo com três quadrados indicando perturbação de densidade $\rho$ . . . . .	81
6.2.2 Sismogramas do Hidrofone resultantes das modelagens 1-6, conforme apresentadas na Tabela 6.1. . . . .	82
6.2.3 Sismogramas da componente vertical $Vz$ do geofone resultantes das modelagens 1-6, conforme apresentadas na Tabela 6.1. . . . .	83
6.2.4 Sismogramas da componente horizontal $Vx$ do geofone resultantes das modelagens 1-6, conforme apresentadas na Tabela 6.1. . . . .	84
6.2.5 Modelos elásticos iniciais: em (a) modelo inicial de perturbação de velocidade compressional $v_p$ ; em (b) modelo inicial de perturbação de velocidade cisalhante $v_s$ e; (c) modelo inicial de perturbação de densidade $\rho$ . . . . .	86
6.3.1 Resultados da inversão para $v_p$ . Na primeira linha (a-d) são resultados utilizando dado de $P$ . Na segunda linha (e-h) são resultados utilizando o dado de $Vz$ . Na terceira linha (i-m), utilizando dado de $P$ e $Vz$ . Na quarta (n-q) linha de $Vx$ . Na quinta linha (r-u) estão os resultados da combinação das três componentes. . . . .	89
6.3.2 Resultados da inversão para $v_s$ . Na primeira linha (a-c) são resultados utilizando dado de $P$ . Na segunda linha (d-f) são resultados utilizando o dado de $Vz$ . Na terceira linha (g-i), utilizando dado de $P$ e $Vz$ . Na quarta (j-m) linha de $Vx$ . Na quinta linha (n-p) estão os resultados da combinação das três componentes. . . . .	90

6.3.3 Resultados da inversão para $v_s$ . Na primeira linha (a-c) são resultados utilizando dado de $P$ . Na segunda linha (d-f) são resultados utilizando o dado de $Vz$ . Na terceira linha (g-i), utilizando dado de $P$ e $Vz$ . Na quarta (j-m) linha de $Vx$ . Na quinta linha (n-p) estão os resultados da combinação das três componentes. . . . .	91
6.3.4 Resultados da inversão simultânea de $v_p$ (coluna 1) e $v_s$ (coluna 2) utilizando como dado de entrada a modelagem 4, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente $P$ , em (c) e (d) componente $Vz$ , em (e) e (f) componentes $P$ e $Vz$ , em (g) e (h) componente $Vx$ e em (i) e (j) as três componentes $P$ , $Vz$ e $Vx$ . . . . .	93
6.3.5 Resultados da inversão simultânea de $v_p$ (coluna 1) e $\rho$ (coluna 2) utilizando como dado de entrada a modelagem 5, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente $P$ , em (c) e (d) componente $Vz$ , em (e) e (f) componentes $P$ e $Vz$ , em (g) e (h) componente $Vx$ e em (i) e (j) as três componentes $P$ , $Vz$ e $Vx$ . . . . .	94
6.3.6 Resultados da inversão simultânea de $v_p$ e $v_s$ utilizando como dado de entrada a modelagem 6, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente $P$ , em (c) e (d) componente $Vz$ , em (e) e (f) componentes $P$ e $Vz$ , em (g) e (h) componente $Vx$ e em (i) e (j) as três componentes $P$ , $Vz$ e $Vx$ . . . . .	95
6.3.7 Resultados da inversão simultânea de $v_p$ e $\rho$ utilizando como dado de entrada a modelagem 6, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente $P$ , em (c) e (d) componente $Vz$ , em (e) e (f) componentes $P$ e $Vz$ , em (g) e (h) componente $Vx$ e em (i) e (j) as três componentes $P$ , $Vz$ e $Vx$ . . . . .	96
6.3.8 Resultados da inversão simultânea de $v_p$ , $v_s$ e $\rho$ utilizando dados gerados da modelagem 6, conforme a Tabela 6.1, separados por componentes: em (a)-(c) componente $P$ , em (d)-(f) utilizando dado da componente $Vz$ , em (g)-(i) componentes $P$ e $Vz$ , em (j)-(l) componente $Vx$ e em (m)-(o) as três componentes $P$ , $Vz$ e $Vx$ . . . . .	98
6.3.9 Erro relativo para modelos de parâmetros resultantes de cada dos 75 casos de inversão. Em (a) modelos resultantes de $v_p$ , em (b) modelos resultantes de $v_s$ e em (c) modelos resultantes de $\rho$ . . . . .	102

A.0.1(a) Aquisição de dados sísmicos: ondas acústicas são enviadas para dentro da subsuperfície da Terra, a partir de uma fonte sísmica. As ondas são refletidas nas interfaces entre diferentes propriedades elásticas e retornam à superfície, onde os receptores registram a energia em função do tempo de chegada. Figura obtida em GUIMARÃES [24]. (b) Diversas famílias de tiro: dados de entrada para a etapa de processamento sísmico. Figura modificada de HAFFINGER [25]. . . . .	116
A.0.2Sismograma ilustrando eventos sísmicos: onda direta, onda refletida, onda refratada e onda difratada. Figura obtida em DA SILVA [17]. . . . .	117
A.0.3O processo de encontrar reservatório de hidrocarboneto com imageamento sísmico inclui diversas etapas. Figura modificada de HAFFINGER [25]. . . . .	118
B.2.1Geometria da malha intercalada para o estêncil de Virieux-Levander. . . . .	125
E.2.1Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando a componente $P$ como dado observado. A coluna 1 corresponde às inversões de $v_p$ , a coluna 2 de $v_s$ e a coluna 3 de $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de $v_s$ com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de $\rho$ com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1. . . . .	137
E.2.2Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando a componente $Vz$ como dado observado. A coluna 1 corresponde a inversões de $v_p$ , a coluna 2 de $v_s$ e a coluna 3 de $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de $v_s$ com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de $\rho$ com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1. . . . .	138
E.2.3Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando a componente $Vx$ como dado observado. A coluna 1 corresponde a inversões de $v_p$ , a coluna 2 de $v_s$ e a coluna 3 de $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de $v_s$ com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de $\rho$ com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1. . . . .	139

E.2.4	Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando as componentes $P$ e $Vz$ como dados observados. A coluna 1 corresponde a inversões de $v_p$ , a coluna 2 de $v_s$ e a coluna 3 de $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de $v_s$ com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de $\rho$ com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1. . . . .	140
E.2.5	Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando as componentes $P$ , $Vz$ e $Vx$ como dados observados. A coluna 1 corresponde a inversões de $v_p$ , a coluna 2 de $v_s$ e a coluna 3 de $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de $v_s$ com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de $\rho$ com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1. . . . .	141



# Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros da modelagem no domínio da frequência. . . . .	23
3.2	Parâmetros da Inversão no domínio da frequência. . . . .	25
4.1	Parâmetros da modelagem no domínio do tempo. . . . .	38
4.2	Parâmetros da Inversão no domínio do tempo. . . . .	42
6.1	Tabela de modelagem com multicomponentes. . . . .	80
E.1	Inversão para o caso de modelagem 1 com perturbação do modelo de $v_p$ e modelo resultante da inversão $v_p$ . . . . .	132
E.2	Inversão para o caso de modelagem 2 com perturbação do modelo de $v_s$ e modelo resultante da inversão $v_s$ . . . . .	132
E.3	Inversão para o caso de modelagem 3 com perturbação do modelo de $\rho$ e modelo resultante da inversão $\rho$ . . . . .	133
E.4	Inversão para o caso de modelagem 4 com perturbação dos modelos de $v_p$ e $v_s$ e modelo resultante da inversão $v_p$ . . . . .	133
E.5	Inversão para o caso de modelagem 4 com perturbação dos modelos de $v_p$ e $v_s$ e modelo resultante da inversão $v_s$ . . . . .	133
E.6	Inversão para o caso de modelagem 4 com perturbação dos modelos de $v_p$ e $v_s$ e modelos resultantes da inversão simultânea de $v_p$ e $v_s$ . . .	133
E.7	Inversão para o caso de modelagem 5 com perturbação dos modelos de $v_p$ e $\rho$ e modelos resultantes da inversão simultânea de $v_p$ . . . . .	134
E.8	Inversão para o caso de modelagem 5 com perturbação dos modelos de $v_p$ e $\rho$ e modelos resultantes da inversão simultânea de $\rho$ . . . . .	134
E.9	Inversão para o caso de modelagem 5 com perturbação dos modelos de $v_p$ e $\rho$ e modelos resultantes da inversão simultânea de $v_p$ e $\rho$ . . . .	134
E.10	Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de $v_p$ , $v_s$ e $\rho$ e modelos resultantes da inversão $v_p$ . . . . .	134
E.11	Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de $v_p$ , $v_s$ e $\rho$ e modelos resultantes da inversão $v_s$ . . . . .	135
E.12	Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de $v_p$ , $v_s$ e $\rho$ e modelos resultantes da inversão $\rho$ . . . . .	135

- E.13 Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$  e  $v_s$ . 135
- E.14 Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$  e  $\rho$ . . 135
- E.15 Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ .136

# Capítulo 1

## Introdução

Na indústria petrolífera é crucial ter informações confiáveis da subsuperfície a fim de localizar e monitorar reservatórios de hidrocarbonetos, de modo a reduzir o risco exploratório e subsidiar a caracterização dos mesmos. Além disso, um projeto de Exploração e Produção que integra conhecimento através de diferentes métodos geofísicos, gerindo corretamente as incertezas sobre a geologia, pode ser capaz de evitar erros de perfuração de poços e prevenir acidentes ambientais.

O método sísmico se destaca dentre as técnicas geofísicas por localizar refletividades de subsuperfícies produzindo uma imagem estrutural de alta resolução (Apêndice A). Técnicas de exploração sísmica estão sendo cada vez mais aprimoradas na indústria petrolífera para determinação de estruturas geológicas em subsuperfícies mais complexas, com presença de meios com altos contrastes de propriedades, tal como acontece no pré-sal da Bacia de Santos. Esse cenário, onde há maior demanda tecnológica para prospecção e produção de hidrocarbonetos, demanda melhores técnicas geofísicas para imageamento e inversão de propriedades petrofísicas.

No processamento sísmico, busca-se obter uma imagem estrutural e atributos que descrevem a subsuperfície de interesse. A finalidade é obter uma imagem para interpretação das estruturas geológicas. Para se obter esta imagem em profundidade, é necessário realizar o procedimento conhecido como migração sísmica, que estima a distribuição de refletividades em que há contraste de impedância entre camadas de subsuperfície. Os atributos de entrada para tal, são o dado sísmico e modelos de parâmetros (quantidades físicas que governam a propagação da onda sísmica na Terra, tais como modelos de velocidades) precisos, que são geralmente estimados durante o processamento sísmico.

Existem diversas técnicas para estimar modelos de velocidades de subsuperfície em larga escala com baixa resolução (ou baixo número de onda), tais como tomografia de tempo de trânsito (*Traveltime Tomography*), que utiliza traçado de raio [73, 83] e análise de velocidade de migração (*Migration Velocity Analysis*) [62, 85].

O método de inversão, conhecido como FWI (do inglês *Full waveform inversion*),

possui vantagens sobre os métodos acima citados, por ser capaz de estimar modelos de maior resolução e ainda poder estimar outros parâmetros, além da velocidade  $v_p$ , como os parâmetros elásticos (velocidade cisalhante  $v_s$  e densidade  $\rho$ ) e anisotropia ( $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\theta$ , e  $\phi$ ). Sua formulação supera as limitações da teoria do traçado de raio e, desta forma, é capaz de melhorar as soluções de imagens tomográficas através do aprimoramento de modelos de velocidades. Enfatizando-se que, na prática, o FWI necessita de um modelo inicial obtido por estas ou outras técnicas.

O método de inversão FWI, introduzido por LAILLY [37] e TARANTOLA [74], é um método não linear de otimização que tem por objetivo estimar e aprimorar propriedades de modelos de parâmetros em subsuperfícies em alta resolução por ajuste do dado sísmico ao dado modelado utilizando a forma completa da onda. Eles reconheceram que a direção do gradiente-descendente para o problema inverso poderia ser obtido sem calcular a matriz Jacobiana explicitamente.

O método FWI vem sendo aplicado com sucesso na indústria como um procedimento padrão na construção de modelos de velocidade [59, 69], mais comumente utilizando eventos de transmissão do dado para reconstruir modelos de baixo número de ondas, e vê-se um número crescente de aplicações utilizando dado de reflexão e inversão de multiparâmetros para caracterização de reservatórios [19, 20].

Esta tecnologia teve um rápido desenvolvimento e implementação nas últimas décadas. Trabalhos pioneiros para o caso acústico foram apresentados por LAILLY [37] e KOLB *et al.* [34] e para o caso viscoelástico por TARANTOLA [76]. PRATT *et al.* [55] e PRATT [54] formularam o método no domínio da frequência, SIRGUE e ALBERTIN [67] para o caso híbrido (tempo e frequência) e SIRGUE *et al.* [70] reportaram a extensão em 3D. A fim de se aprimorar e adequar o método para aplicações em escala industrial, progressos teóricos, juntamente com desenvolvimentos tecnológicos em computação e aquisição sísmica foram realizados. Adicionalmente, esta tecnologia tem sido aplicada considerando o meio anisotrópico, como apresentado por WARNER *et al.* [81], meios elásticos com extensão em 4C de aquisição de multicomponente, demonstrado por VIGH *et al.* [77], e considerando efeitos de absorção, realizado por BAI *et al.* [3].

Todavia, há alguns desafios que permanecem em aberto, especialmente para o caso de reconstrução de multiparâmetros [49, 56, 57]. Quando considera-se graus de liberdade adicionais, ou seja, mais parâmetros desconhecidos e, dependendo da sensibilidade do dado com relação aos parâmetros, artefatos como interferências (*cross-talk*) podem ocorrer entre os modelos resultantes da inversão [36]. Adicionalmente, a ambiguidade (*trade-off*) entre diferentes parâmetros aumenta a não-linearidade do problema inverso.

Sob estas circunstâncias, esta tese de doutorado propõe uma nova metodologia de direções de atualizações de multiparâmetros elásticos para o método de inver-

são FWI utilizando as propriedades de reparametrização da Hessiana aproximada. Desta forma assegura-se que as direções de atualização de parâmetros sejam adequadamente escaladas, além de manter as unidades apropriadas do problema.

## 1.1 Estrutura da tese

Este trabalho abrange estratégias de inversão de FWI para multiparâmetros e está organizado da seguinte forma:

No Capítulo 2 é apresentada uma introdução ao FWI e são descritos os métodos adjunto e definição de métodos de otimização locais.

No Capítulo 3 são especificados alguns métodos de otimização locais e, com fim de comparação, são avaliados os seguintes métodos: o mais simples, que é o gradiente-descendente (em inglês *steepest-descent* - SD), duas aproximações do método de gradiente conjugado, propostos por POLAK e RIBIÈRE [53] e FLETCHER e REEVES [23], e o Quasi-Newton (l-BFGS) [47]. A aplicação destes métodos foi realizada com o FWI acústico 2D isotrópico no domínio da frequência, utilizando o modelo Marmousi BOURGEOIS *et al.* [8]. A partir dos resultados, assim como já previsto na literatura, foi confirmado que o l-BFGS, que faz aproximações da Hessiana iterativamente, é o que melhor estima o modelo resultante, além de convergir mais rapidamente para um modelo satisfatório.

Na indústria, o método de inversão FWI tem sido utilizado em sua aproximação acústica e isotrópica por ser computacionalmente mais econômica. No entanto, o dado elástico é mais próximo de um dado real e pode ter considerável influência da anisotropia [11, 35, 56, 57, 79]. Com o propósito de avaliar o impacto causado aos modelos de velocidades resultantes, no Capítulo 4 são comparados os resultados da inversão acústica para dois casos: utilizando dados sintéticos acústicos e elásticos. O resultado apresentado neste capítulo motivou investigar o FWI para outras classes de parâmetros, como densidade e velocidade cisalhante, conforme estão apresentados nos capítulos 5 e 6.

Portanto, o Capítulo 5 examina este problema e fornece uma alternativa para atualizações das direções para o FWI, tanto acústico como de multiparâmetros elástico, levando em consideração a transformação de propriedades da Hessiana e suas aproximações, uma vez que a Hessiana contém informações relacionadas a escala de parâmetros. Com o propósito de validar o método proposto, o Capítulo 5 descreve sua formulação e apresenta, para os casos 2D isotrópico acústico e elástico, exemplos sintéticos com o modelo Marmousi-2 [42]. No caso acústico, foi feita uma comparação entre diferentes parametrizações para atualizar a velocidade compressional, sendo a

primeira a própria velocidade compressional, o quadrado da vagarosidade e a velocidade compressional com o gradiente escalado pela diagonal da pseudo-Hessiana. A parametrização utilizando o quadrado da vagarosidade já é conhecida por fornecer resultado melhor escalado que o primeiro. Estes dois últimos forneceram resultados consideravelmente semelhantes.

Por conseguinte, são calculadas as direções de atualização, para o caso elástico, escaladas pela diagonal da pseudo-Hessiana. É feita uma aplicação numérica a fim de comparação entre o método proposto e o convencional. Como método de otimização local, é utilizado para ambos os casos o gradiente-descendente e o método l-BFGS é utilizado apenas para o caso convencional. Para esta implementação, é considerado o caso 2D de três componentes (3C: 1 hidrofone e 2 geofones), que permitem registros de informações de pressão junto com velocidade de partículas nas direções horizontal e vertical. Os resultados numéricos mostram que a direção de atualização proposta melhor escala os modelos estimados e fornece um decaimento maior do valor da função objetivo, o que corrobora com a teoria desenvolvida.

No Capítulo 6 é feita uma análise da inversão FWI de multiparâmetros que tem por objetivo avaliar acurácia dos resultados de inversão ao combinar dados de multicomponentes. Para tal investigação, é utilizado um modelo simplificado conhecido por CTS (*Cross, triangle, square*), similar ao utilizado por KÖHN [35], por ser uma forma eficiente de demonstrar a resolução e a ambiguidade dos resultados de FWI para diferentes parâmetros. Para se obter melhores estimativas de modelos resultantes da inversão por FWI, conclui-se que quando o algoritmo for de inversão monoparâmetro para  $v_p$ , o dado observado de entrada deve ser proveniente da componente hidrofone. E, quando o algoritmo for multiparâmetro elástico ( $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ ), todas as componentes devem ser levadas em consideração. Ressalta-se que os modelos resultantes são mais acurados quando se considera inversão de multiparâmetros.

## 1.2 Ferramental

Neste trabalho foi feito um levantamento de estudos relacionados ao problema de inversão utilizando a equação completa da onda para os casos 2D isotrópico acústico e elástico nos domínios espaço-tempo e espaço-frequência. Para tal, foram utilizadas as seguintes implementações desenvolvidas ao longo deste doutorado:

1. Modelagem acústica no domínio da frequência, utilizando malha mista com estêncil de 9 pontos, como descrito em HUSTEDT *et al.* [28];

2. Inversão acústica no domínio da frequência [55] com métodos de otimização gradiente-descendente, gradiente-conjugado (Polak-Ribière e Fletcher-Reeves) e quasi-Newton (l-BFGS) [47];
3. Modelagem acústica no domínio do tempo com aproximação por diferenças finitas de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo [33];
4. Inversão acústica no domínio do tempo utilizando o método gradiente-descendente [74];
5. Modelagem elástica no domínio do tempo com malha intercalada, como proposto por [78], com aproximação de quarta ordem no espaço e segunda no tempo, como apresentado em [38].
6. Inversão elástica híbrida (modelagem no domínio do tempo e inversão no domínio da frequência), com aproximação de oitava ordem no espaço e segunda ordem no tempo, considerando multicomponentes, conforme VIGH *et al.* [77], havendo duas possibilidades de atualização dos parâmetros elásticos: 1) por transformação de conjunto de propriedades baseada no gradiente, que é o método convencional de se obter as direções de atualizações, e 2) utilizando as propriedades de reparametrização da Hessiana aproximada, que é o método proposto nesta tese.

# Capítulo 2

## O método de inversão FWI

### 2.1 Introdução

Este capítulo apresenta os conceitos básicos da formulação do método FWI. Inicia-se com a definição de problemas direto e inverso (Seção 2.2); na Seção 2.3 faz-se a descrição do método de inversão FWI (do inglês, *Full waveform inversion*); a Seção 2.4 descreve o método adjunto como uma solução computacionalmente factível para o gradiente da função objetivo; a Seção 2.5 descreve brevemente o conceito de método de otimização local; por fim, a Seção 2.6 descreve os problemas de custo computacional e não unicidade.

### 2.2 Problemas direto e inverso

A teoria da inversão busca inferir parâmetros de sistemas físicos de forma indireta, a partir de dados observados. As leis da Física nos permitem simular ações e interações de parâmetros por um sistema chamado *modelo*. O modelo é a representação de um sistema natural (por exemplo: a subsuperfície terrestre, o corpo humano, o átomo, etc.) e é descrito por uma série de *parâmetros* (velocidade, densidade, condutividade, etc.). O modelo, uma vez perturbado, permite que um conjunto quantitativo de medidas seja gerado: *o dado*. O sistema de equações relacionando o dado  $\mathbf{d}$  e o modelo de parâmetros  $\mathbf{p}$  é chamado de *problema direto*:

$$\mathbf{d} = \mathbf{L}(\mathbf{p}), \quad (2.2.1)$$

onde  $\mathbf{L}$  é um operador direto (ou a lei física que relaciona os parâmetros  $\mathbf{p}$ ). A ação inversa consiste em encontrar parâmetros  $\mathbf{p}$  que explicam o dado observado  $\mathbf{d}$  – chamado de *problema inverso*. Uma representação da solução para o problema



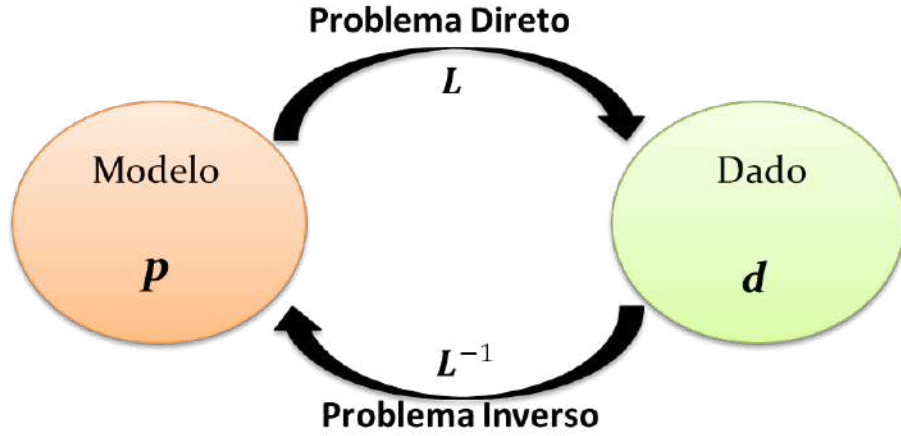


Figura 2.2.1: Esquema da relação entre o modelo de parâmetros  $\mathbf{p}$  e o dado medido  $\mathbf{d}$ .

inverso é definir um operador inverso  $\mathbf{L}^{-1}$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{d}). \quad (2.2.2)$$

A relação entre os problemas direto e inverso está ilustrada na Figura 2.2.1. É possível que a resposta inversa seja uma estimativa incompleta, que difere do modelo real. A solução da Equação 2.2.2 é mais complexa do que a Equação 2.2.1, pois quando busca-se obter  $\mathbf{p}$  a partir do dado  $\mathbf{d}$  com o operador  $\mathbf{L}$ , inúmeras vezes há uma infinidade de soluções  $\mathbf{p}$  que explica  $\mathbf{d}$  – isso caracteriza a não unicidade de soluções. Portanto, para determinar uma solução inversa, um modelo matemático precisa ser bem definido com relação aos parâmetros físicos do modelo real. Além disso, a presença de incertezas e ruídos nas medidas do dado observado, não incluídos no problema direto, podem resultar a não existência ou instabilidade na solução do problema inverso.

No contexto da sismica, o objetivo do problema inverso é estimar quantitativamente modelos de parâmetros da subsuperfície da Terra a partir de dados sísmicos  $\mathbf{d}$  medidos durante a aquisição. O campo de onda registrado é conhecido, enquanto os parâmetros físicos do meio no qual o campo de onda foi propagado são desconhecidos. Em geral, o operador depende não linearmente do modelo de parâmetro  $\mathbf{p}$ . Infelizmente, para a maioria dos problemas inversos sísmicos, o operador direto  $\mathbf{L}$  não possui inverso  $\mathbf{L}^{-1}$ , e não se pode simplesmente invertê-lo como ilustrado na Equação 2.2.2. Com isso, a técnica de inversão em questão é comumente formulada como um problema de otimização de uma função objetivo (função erro), que garante a existência de solução mesmo na presença de dados ruidosos.

## 2.3 Formulação FWI

O método de inversão FWI busca obter modelos de propriedades que representem características físicas da subsuperfície  $\mathbf{p}$  que melhor expliquem o dado proveniente da aquisição  $\mathbf{d}$ . O método resume-se numa modelagem numérica da propagação do campo de onda e da solução de um problema inverso.

A modelagem, que é a solução de um problema direto, tem como propósito simular o dado da aquisição. Esta simulação consiste de um modelo fornecido, onde o campo de onda é propagado, e pode ser expressa por uma representação da equação da onda, como

$$L(\mathbf{p}; u) = f, \quad (2.3.1)$$

onde  $L$  é o operador direto da equação da onda,  $\mathbf{p}$  representa o modelo de parâmetros do meio,  $u$  é o campo de onda simulado, e  $f$  é a fonte de perturbação do sistema. A restrição  $g$  satisfeita pelo campo de onda modelado  $u$  pode ser escrita como

$$g(\mathbf{p}; u) \equiv L(\mathbf{p}; u) - f = 0. \quad (2.3.2)$$

O dado resultante da modelagem é então comparado ao dado da aquisição, através da computação do erro entre os mesmos, que é definida como função objetivo  $E(\mathbf{p}; u)$ .

Uma função objetivo comumente utilizada é a norma  $L_2$  do resíduo, que é a soma do quadrado da diferença entre o dado observado  $d$  e o campo de onda na posição dos receptores  $u$ , definida por

$$E(\mathbf{p}; u) = \frac{1}{2} \|Ru(\mathbf{p}) - d\|^2, \quad (2.3.3)$$

em que  $R$  é o projetor que restringe o campo de onda na posição dos receptores.

Este problema inverso, que é não linear, é resolvido pela minimização da função objetivo. A atualização do modelo é realizada objetivando a redução do valor da função objetivo ao longo de uma dada direção. A direção descendente  $\mathbf{h}_k$  atualiza iterativamente o modelo de parâmetros:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \alpha_k \mathbf{h}_k \quad (2.3.4)$$

onde  $k$  representa a  $k$ -ésima iteração e  $\alpha_k$  é o tamanho do passo, que é um valor positivo e escalar determinado por um procedimento de busca linear [47]. A atualização garante a redução do valor da função objetivo e as iterações são determinadas por um critério de parada adequado.

Esta minimização deve ser computacionalmente factível, sendo solucionada através do método de estado adjunto (Seção 2.4) combinado a algum método de otimi-

zação local (Seção 2.5).

## 2.4 Método de estado Adjunto

O método da Lagrangeana aumentada [6, 9, 15, 51, 77] fornece uma maneira eficiente de computar o gradiente da função objetivo. A Lagrangeana funcional associada para as Equações (2.3.1)-(2.3.2) é dada por:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}; u, u^\dagger) = E(\mathbf{p}; u) + \langle u^\dagger, g(\mathbf{p}; u) \rangle, \quad (2.4.1)$$

onde  $\langle u, v \rangle = \int_T dt \int_G d^3x u(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t)$  representa o produto interno. A realização do campo de onda  $u$  é obtida quando este satisfaz a equação da onda

$$\nabla_{u^\dagger} \mathcal{L} = g(\mathbf{p}; u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L(\mathbf{p}; u) = f. \quad (2.4.2)$$

O multiplicador de Lagrange  $u^\dagger$  é imposto para satisfazer a equação de estado adjunta:

$$\nabla_u \mathcal{L} = R^\dagger (Ru - d) + \left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)^\dagger u^\dagger = 0. \quad (2.4.3)$$

E finalmente, o gradiente da função objetivo é dado por:

$$\nabla_p \mathcal{L} = \nabla_p E + \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)^\dagger u^\dagger = 0, \quad (2.4.4)$$

onde  $R^\dagger$ ,  $\left( \frac{\partial g}{\partial u} \right)^\dagger$ ,  $\left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)^\dagger$  denotam os operadores adjuntos de  $R$ ,  $\frac{\partial g}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial p}$  nesta ordem. Este resultado, conhecido como o método de estado adjunto, computa eficientemente os gradientes para FWI. Desta forma, evita-se o cálculo do gradiente por diferenças finitas ou por derivadas de Fréchet. Este método modifica a forma de calcular o gradiente da função objetivo. Para a equação da onda no domínio do tempo utilizando a norma  $L_2$ , o gradiente da função objetivo é calculado como a correlação cruzada de atraso nulo (*zero-lag*) entre o campo de onda incidente e a retropropagação dos resíduos.

Outra abordagem para se calcular os gradientes para o FWI é através do método adjunto no domínio da frequência, conforme apresentado por PRATT *et al.* [55]. O gradiente da função objetivo no domínio da frequência é calculado da seguinte forma:

$$(\nabla_p E)_j = \frac{\partial E}{\partial p_j} = \frac{\partial}{\partial p_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta d_i \delta d_i^* \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \delta d_i}{\partial p_j} \delta d_i^* + \delta d_i \frac{\partial \delta d_i^*}{\partial p_j} \right) \quad (2.4.5)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (J_{ij} \delta d_i^* + \delta d_i J_{ij}^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (J_{ji}^T \delta d_i^* + (J_{ji}^T)^* \delta d_i) \quad (2.4.6)$$

$$= \sum_{i=1}^n \Re (J_{ij}^T \delta d_i^*) = \Re (J^T \delta d^*)_j. \quad (2.4.7)$$

$$\nabla E|_{p=p_0} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} = \Re \{ \mathbf{J}^T \delta \mathbf{d}^* \} \quad (2.4.8)$$

onde  $\delta \mathbf{d}^*$  é o complexo conjugado do dado residual  $\delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{R}\mathbf{u}$  (dado observado menos dado calculado).  $\mathbf{J}^T$  é o transposto da matriz derivada de Fréchet  $n \times m$ , onde assume-se que  $m$  são os parâmetros do modelo e  $n$  número de observações experimentais. Os vetores coluna  $\mathbf{p}$  e  $\nabla_p E$  possuem tamanho  $m$ . Os elementos da matriz de Fréchet (incluindo os valores complexos para o caso no domínio da frequência) são dados por

$$J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial p_j}, \quad i = (1, 2, \dots, n); \quad j = (1, 2, \dots, m). \quad (2.4.9)$$

Essa matriz é composta por derivadas parciais do dado calculado com respeito aos parâmetros do modelo.

Conecta-se explicitamente o cálculo do vetor gradiente para o problema inverso ao problema direto pelo método adjunto. Dado o problema direto:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.4.10)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o campo de onda calculado,  $\mathbf{L}$  é a matriz impedância (operador de modelagem), que depende dos parâmetros do modelo  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{p})$ , e  $\mathbf{f}$  é o termo fonte. Sabendo que  $E(\mathbf{p}) = E[\mathbf{u}(\mathbf{p})]$ , toma-se a derivada parcial da Equação 2.4.10 com relação ao parâmetro do modelo  $p_i$ . Como o termo fonte  $\mathbf{f}$  não depende do modelo de parâmetros, tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} \mathbf{u} + \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} = 0 \quad (2.4.11)$$

$$\mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} = - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} \mathbf{u} \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} = -\mathbf{L}^{-1} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} \mathbf{u}. \quad (2.4.13)$$

Pode-se introduzir o termo fonte virtual

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{f}^{(i)} \quad (2.4.14)$$

em que

$$\mathbf{f}^{(i)} = -\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial p_i} \mathbf{u}. \quad (2.4.15)$$

Por analogia à Equação 2.4.10, pode ser visto que as derivadas de Fréchet poderiam ser calculadas de forma explícita, resolvendo-se o problema direto para o termo fonte virtual  $\mathbf{f}^{(i)}$ . No entanto, para o cálculo eficiente do gradiente, substitui-se a Equação 2.4.15 na Equação 2.4.8 e obtém-se a seguinte expressão para a componente  $i$  do vetor gradiente:

$$(\nabla E)_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} = -\Re \left\{ \mathbf{u}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{L}^T}{\partial p_i} \right] (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{R}^T \delta \mathbf{d}^* \right\}, \quad (2.4.16)$$

onde  $\mathbf{R}^T$  é a matriz que posiciona os dados nas posições observadas do modelo,  $\delta \mathbf{d}$  é o vetor dado residual.

A equação acima mostra que o gradiente da função objetivo pode ser obtido através do produto do campo de onda modelado  $\mathbf{u}$  com o campo de onda oriundo da depropagação do dado residual  $(\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{R}^T \delta \mathbf{d}^*$ . A matriz  $\partial \mathbf{L}^T / \partial p_i$  é facilmente computada a partir dos coeficientes de  $\mathbf{L}$ . Essa matriz impedância é extremamente esparsa, pois ela representa um operador de suporte local centrado no entorno da posição do parâmetro  $p_i$ .

## 2.5 Métodos locais de otimização

Para solucionar problemas inversos existem duas principais categorias de métodos de otimização que lidam com a resolução de problemas inversos: *métodos globais* e *métodos locais*. Os métodos globais encontram a melhor solução dentre todas as soluções possíveis do problema mal posto. Até o momento, métodos globais ainda não são amplamente utilizados em problemas com grande número de parâmetros, devido a estes serem computacionalmente dispendiosos em problemas de grande porte. Alguns exemplos de métodos de otimização globais são o Monte Carlo, algoritmos genéticos, *Simulated Annealing*, *Particle Swarm Optimization*, *Differential Evolution*, entre outros [64].

Métodos locais de otimização [47, 55] tem sido empregados em problemas de grande porte, inclusive problemas 3D. Estes métodos atualizam os parâmetros de forma iterativa por uma direção descendente. A solução depende do modelo inicial e do método de busca de solução, que converge para a melhor solução (critério estabe-

lecido pela função objetivo) num ponto de mínimo próximo à vizinhança do modelo inicial. Se o modelo inicial estiver longe do modelo verdadeiro, métodos iterativos podem convergir a um determinado mínimo local, que pode ser uma solução espúria. Uma ilustração simplificada desta ideia encontra-se na Figura 2.5.1.

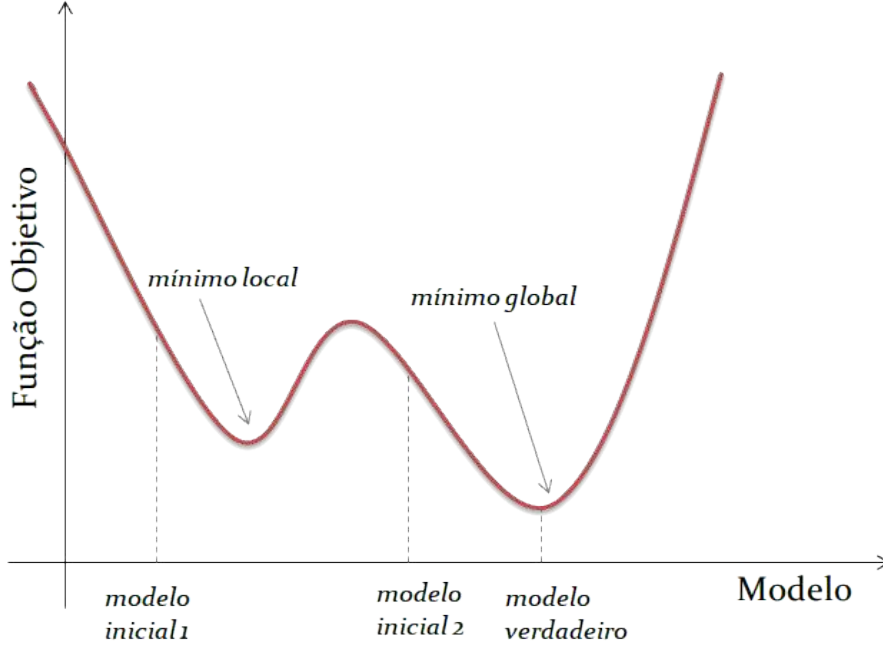


Figura 2.5.1: Gráfico ilustrando o problema de mínimos locais. A função objetivo possui mínimos locais devido à relação não linear entre o operador direto  $\mathbf{L}$  e o modelo  $\mathbf{p}$ . Figura modificada de MA [40].

A direção de atualização  $\mathbf{h}_k$  (ilustrada na Equação 2.3.4) pode ser obtida por diferentes métodos de otimização locais. A mais simples desta é o gradiente-descendente, que atualiza o modelo na direção oposta à direção do gradiente, isto é, numa direção de decrescimento da função objetivo. A atualização pelo método do gradiente-descendente é representada pela seguinte equação:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \alpha_k \nabla_p E_k. \quad (2.5.1)$$

Outras direções de atualização são possíveis com estimativas da função objetivo com a primeira ou segunda derivadas. Até a sua primeira derivada  $\left( \nabla E(\mathbf{p}_k) = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}_k} \right)$  compreendem os métodos do gradiente descendente e gradientes conjugados e, até sua segunda derivada  $\left( H_{ij}(\mathbf{p}_k) = \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j} \Big|_{\mathbf{p}_k} \right)$ , abrange os métodos de Newton, Gauss-Newton e quasi-Newton (estimativa da Hessiana). O Capítulo 3 apresenta mais detalhes de alguns métodos comuns de otimização local.

## 2.6 Custo computacional e não unicidade

Em inversão de problemas não lineares de grande porte, como em FWI, é importante levar em consideração dois principais desafios: o *custo computacional* e a *não unicidade* do problema.

O primeiro diz respeito ao algoritmo de FWI, que requer uma grande quantidade de modelagens diretas e retropropagações dos campos de onda sísmicos. Desta forma, o custo computacional torna-se proporcional ao número de tiros, quando o problema é formulado no domínio espaço-tempo e, proporcionalmente ao número de frequências, quando o problema é resolvido no domínio espaço-frequência. Esta técnica de inversão também requer múltiplas iterações, ou seja, o custo computacional também se torna proporcional ao número de iterações.

Quanto a não unicidade, esta ocorre porque FWI é um problema indeterminado (mal posto). O operador de modelagem  $L$  deve ser aproximado a partir de hipóteses simplificadoras do problema físico, no entanto nunca é precisamente conhecido, contudo geralmente é função não linear do modelo de parâmetros  $\mathbf{p}$ . Diferentes modelos podem gerar um dado modelado que se ajuste ao dado observado dentro de uma razoável tolerância, que leva em conta as incertezas e inadequações no dado registrado e na teoria envolvida no cálculo do dado modelado. Uma outra questão que deve ser levada em conta é o salto de ciclo (*cycle-skipping*), que ocorre se a diferença de fase (atraso de tempo) entre o dado sintético e o dado observado for maior que o meio período da *wavelet* dominante [79] quando o problema é não linear. O salto de ciclo leva a mínimos locais na função objetivo, podendo conduzir a modelos que não correspondem ao modelo real da subsuperfície. Para diminuir este problema, utiliza-se técnicas de multiescala. As técnicas de multiescala em frequências [7, 12, 68] adicionam recursivamente detalhes de altas frequências a modelos primeiramente calculados a partir de baixas frequências. Com isto, pode ser reduzida a não linearidade do problema inverso. A fidelidade de técnicas de multiescala depende fundamentalmente da qualidade das baixas frequências contidas no dado registrado. Existem outros exemplos de técnicas de multiescala, como iniciar atualização das partes mais rasas às mais profundas do modelo, ou de afastamentos fonte-receptor mais curtos aos mais longos, ou dos menores aos maiores tempos do dado observado.

# Capítulo 3

## Estudo dos métodos de otimização locais

### 3.1 Introdução

Este capítulo é dividido em duas partes, primeiro são descritos alguns métodos de otimização local e a busca linear. Em seguida, são apresentados os resultados de aplicação numérica da inversão por FWI para o caso 2D isotrópico acústico no domínio da frequência. O objetivo é comparar os métodos de otimização em questão.

### 3.2 Método do gradiente-descendente (SD)

O método do gradiente-descendente consiste em computar o negativo do gradiente da função objetivo, que representa a direção de maior decréscimo [47]. Deste modo, o valor da função objetivo pode ser reduzida atualizando o modelo ao longo desta direção. A atualização iterativa tem a forma:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \alpha_k \mathbf{h}_k \quad (3.2.1)$$

onde  $\mathbf{h}_k = -\nabla_p E_k$  e  $\mathbf{p}$  é o modelo de parâmetros. A principal vantagem deste método é de necessitar somente do gradiente da função objetivo. Por outro lado, a desvantagem deste método é que ele converge lentamente com uma taxa de convergência tipicamente linear [47].

### 3.3 Métodos de Newton e Gauss-Newton (GN)

O método de Newton baseia-se no pressuposto de que a função objetivo é aproximadamente quadrática na vizinhança de  $\mathbf{p}_0$ . Expressando a função objetivo como



uma série de Taylor de segunda ordem, tem-se

$$E(\mathbf{p}_0 + \delta\mathbf{p}) = E(\mathbf{p}_0) + \delta\mathbf{p}^T \mathbf{g}_0 + \frac{1}{2} \delta\mathbf{p}^T \mathbf{H} \delta\mathbf{p} + O(|\delta\mathbf{p}|^3) \quad (3.3.1)$$

onde  $\mathbf{g}_0$  representa o gradiente da função objetivo avaliado em  $\mathbf{p}_0$  ( $\mathbf{g}_0 \equiv \nabla E|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0}$ ) e,  $\mathbf{H}$  representa a matriz Hessiana de dimensão  $m \times m$  (sendo o modelo de dimensão  $m$ ), composta por derivadas parciais de segunda ordem de  $E(\mathbf{p})$  avaliada também em  $\mathbf{p}_0$ . A Hessiana é definida como

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 E(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} \right|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_0} \quad i = (1, 2, \dots, m); \quad j = (1, 2, \dots, m). \quad (3.3.2)$$

A matriz Hessiana pode ser expressa explicitamente conforme [55]:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j} \\ &= \Re \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial p_i} & \frac{\partial u_2}{\partial p_i} & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial p_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1^*}{\partial p_j} \\ \frac{\partial u_2^*}{\partial p_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m^*}{\partial p_j} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial p_i \partial p_j} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial p_i \partial p_j} & \dots & \frac{\partial^2 u_m}{\partial p_i \partial p_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta d_1^* \\ \delta d_2^* \\ \vdots \\ \delta d_m^* \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

De forma compacta, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \Re \{ \mathbf{J}^T \mathbf{J}^* \} \\ &\quad + \Re \left\{ \left[ \left( \frac{\partial}{\partial p_1} \mathbf{J}^T \right) \delta \mathbf{d}^* \left( \frac{\partial}{\partial p_2} \mathbf{J}^T \right) \delta \mathbf{d}^* \dots \left( \frac{\partial}{\partial p_m} \mathbf{J}^T \right) \delta \mathbf{d}^* \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz de Fréchet.

Pode-se expressar a Hessiana como uma soma de duas matrizes

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_a + \mathbf{R}, \quad (3.3.5)$$

onde

$$\mathbf{H}_a = \Re \{ \mathbf{J}^T \mathbf{J}^* \} \quad (3.3.6)$$

é a *Hessiana aproximada* e

$$\mathbf{R} = Re \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{J}^T}{\partial \mathbf{p}^T} \right) \begin{pmatrix} \delta \mathbf{d}^* & \delta \mathbf{d}^* & \dots & \delta \mathbf{d}^* \end{pmatrix} \right\} \quad (3.3.7)$$

é a *Hessiana residual*. Para problemas lineares a matriz  $\mathbf{R}$  é nula, uma vez que  $\mathbf{J}$  não depende de  $\mathbf{p}$ .

Busca-se um vetor  $\delta \mathbf{p}$  que deve localizar o mínimo da função objetivo com aproximação quadrática. Para problemas de grande porte, o método de Newton torna-se um grande desafio devido ao grande custo computacional para o cálculo, armazenamento e inversão da matriz Hessiana.

Desprezando termos superiores aos termos de segunda ordem na Equação 3.3.1, a aproximação de Taylor torna-se quadrática com relação à perturbação do modelo  $\delta \mathbf{p}$ . Desta forma, é possível minimizar a função objetivo  $E(\mathbf{p})$  resolvendo-se o seguinte conjunto de equações lineares:

$$\mathbf{H} \delta \mathbf{p} = -\mathbf{g}_0 \quad (3.3.8)$$

se existir  $\mathbf{H}^{-1}$ , uma solução é dada por

$$\delta \mathbf{p} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}_0. \quad (3.3.9)$$

Resolve-se iterativamente para:

$$\delta \mathbf{p}_k = -\mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k \quad (3.3.10)$$

e

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k \quad (3.3.11)$$

onde  $\mathbf{g}_k \equiv \mathbf{g}(\mathbf{p}_k)$  e  $\mathbf{H}_k$  é a matriz Hessiana avaliada em  $\mathbf{p}_k$ .

Enquanto o método de Newton leva em conta a Hessiana completa, o método Gauss-Newton utiliza apenas a Hessiana aproximada excluindo o termo não linear  $\mathbf{R}$  [55]. A atualização do modelo pelo método Gauss-Newton é definida como

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{g}_k. \quad (3.3.12)$$

Para problemas lineares essa aproximação converge para o mínimo na primeira iteração. Sendo não-linear, a função objetivo não é exatamente quadrática e o método de Newton não deve convergir em apenas uma iteração.

### 3.4 Método quasi-Newton (l-BFGS)

O método de Newton, em geral, converge rapidamente quando se está próximo

de uma solução, porém, este pode requerer um custo computacional substancial por iteração. Essa limitação motivou o desenvolvimento de métodos quasi-Newton, que provém de aproximações da matriz Hessiana obtidas iterativamente. Os métodos conhecidos como quasi-Newton têm a forma:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k - \alpha_k \mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}_k, \quad (3.4.1)$$

em que  $\mathbf{B}_k$  é uma aproximação para a matriz Hessiana e  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Atualmente, a versão quasi-Newton mais efetiva e popular é fundamentada no método de atualização da secante, chamada de BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [47]. A fórmula para a atualização de  $\mathbf{B}$  é dada como segue:

$$\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{V}_k^T \mathbf{B}_k \mathbf{V}_k + \rho_k \mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T \quad (3.4.2)$$

tal que

$$\rho_k = \frac{1}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k}, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{I} - \rho_k \mathbf{y}_k \mathbf{s}_k^T, \quad (3.4.3)$$

$\mathbf{I}$  é a matriz identidade e

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k \text{ e } \mathbf{y}_k = \mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k. \quad (3.4.4)$$

Note que, ao contrário do método de Newton, nenhuma derivada de segunda ordem é avaliada diretamente. Esse método geralmente é iniciado fazendo  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{I}$ , isso significa que o passo inicial é dado ao longo da direção do negativo do gradiente e em seguida as informações das derivadas de segunda ordem são gradualmente acumuladas numa aproximação da matriz Hessiana através de iterações sucessivas.

Como a maioria dos métodos quasi-Newton baseados na atualização da secante, o BFGS normalmente tem uma taxa de convergência super-linear [47], apesar da aproximação da Hessiana não necessariamente convergir para a Hessiana verdadeira.

Na prática, o algoritmo BFGS evita a fatoração de  $\mathbf{B}$  em cada iteração. Ao invés de atualizar diretamente  $\mathbf{B}$ , ele atualiza a sua inversa. Pode ser demonstrado que a fórmula BFGS equivalente para a inversa de  $\mathbf{B}_k$  é dada por:

$$\mathbf{B}_{k+1}^{-1} = \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k} \right) \mathbf{B}_k^{-1} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{y}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k} \right) + \frac{\mathbf{s}_k \mathbf{s}_k^T}{\mathbf{y}_k^T \mathbf{s}_k}. \quad (3.4.5)$$

Uma vez que o método BFGS armazena todos os pares de vetores  $\mathbf{s}_k$  e  $\mathbf{y}_k$ , o inverso da aproximação da Hessiana  $\mathbf{B}_k$  é geralmente densa, portanto, para casos de problemas com grandes números de variáveis, o custo de armazenamento e manipulação se torna proibitivo. Para contornar este problema, foi desenvolvido o método l-BFGS (versão BFGS de memória limitada) que é adequado para problemas de

otimização com grande números de variáveis, pois este armazena apenas alguns números de atualização  $M$  (entre 3 e 20) da inversa da Hessiana por pares de vetores  $(\mathbf{s}_k$  e  $\mathbf{y}_k)$ , o que representa a aproximação implícita. Estas atualizações são utilizadas para implicitamente fazerem as operações exigindo o produto  $\mathbf{B}_k^{-1} \nabla E(\mathbf{p}_k)$ .

A aproximação para utilizar o histórico de atualizações para formar a direção do vetor é o algoritmo recursivo [47]. Pode-se escolher uma aproximação da Hessiana inicial usando  $(\mathbf{B}_k^0)^{-1} = \gamma_k \mathbf{I}$ :

$$\gamma_k = \frac{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}{\mathbf{y}_{k-1}^T \mathbf{y}_{k-1}}, \quad (3.4.6)$$

onde  $\gamma_k$  é o fator de escalar que tenta estimar o tamanho da matriz Hessiana. O procedimento recursivo para calcular o produto  $\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g}$  eficientemente em dois *loops* é apresentado a seguir:

```

 $q \leftarrow \mathbf{g}_k;$ 
para  $i = k - 1, k - 2, \dots, k - M$ 
     $\alpha_i \leftarrow \rho_i \mathbf{s}_i^T q$ 
     $q \leftarrow q - \alpha_i \mathbf{y}_i$ 
fim para
 $r \leftarrow (\mathbf{B}_k^0)^{-1} q$ 
para  $i = k - M, k - M + 1, \dots, k - 1$ 
     $\beta \leftarrow \rho_i \mathbf{y}_i^T r$ 
     $r \leftarrow r + \mathbf{s}_i (\alpha_i - \beta)$ 
fim para
parar com o resultado  $\mathbf{B}_k^{-1} \mathbf{g} = r$ .

```

### 3.5 Métodos gradiente-conjugados (CG)

Os métodos gradientes-conjugados são alternativas ao método do gradiente-descendente, que podem ser mais eficientes. O método do gradiente-descendente pode buscar a mesma direção de forma repetitiva, conduzindo a uma convergência muito lenta [47]. Como sugere o nome, o método do gradiente-conjugado também utiliza o gradiente, mas evita a busca repetitiva através da modificação do gradiente em cada iteração, removendo assim componentes de direções anteriores. Essa técnica de otimização não armazena uma aproximação para a matriz Hessiana, o que a torna especialmente adequada para problemas de grande porte.

A equação de atualização do gradiente-conjugado pode ser feita modificando-se a Equação 2.3.4, substituindo  $\mathbf{h}_k$  por  $-\nabla E(\mathbf{p}_k) + \beta_k \mathbf{h}_{k-1}$ . Logo, a equação de atualização do modelo pode ser expressa por

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \alpha_k (-\nabla E(\mathbf{p}_k) + \beta_k \mathbf{h}_{k-1}). \quad (3.5.1)$$

Duas das mais importantes variantes do método gradiente-conjugado são as apresentadas por Fletcher-Reeves [23], onde  $\beta = \beta^{FR}$

$$\beta_k^{FR} = \frac{\nabla E(p_k)^T \nabla E(p_k)}{\nabla E(p_{k-1})^T \nabla E(p_{k-1})},$$

e por Polak-Ribière [53], em que  $\beta = \beta^{PR}$

$$\beta^{PR} = \frac{\nabla E(p_k)^T [\nabla E(p_k) - \nabla E(p_{k-1})]}{\|\nabla E(p_{k-1})\|}.$$

## 3.6 Busca Linear

Uma vez escolhida uma direção de busca  $\mathbf{h}_k$ , deve-se estabelecer uma estratégia de busca linear para encontrar um mínimo local. O algoritmo de busca linear procura ao longo dessa direção um passo  $\alpha$  adequado em que o valor da função objetivo é reduzido. Uma representação esquemática desse processo é apresentado na Figura 3.6.1.

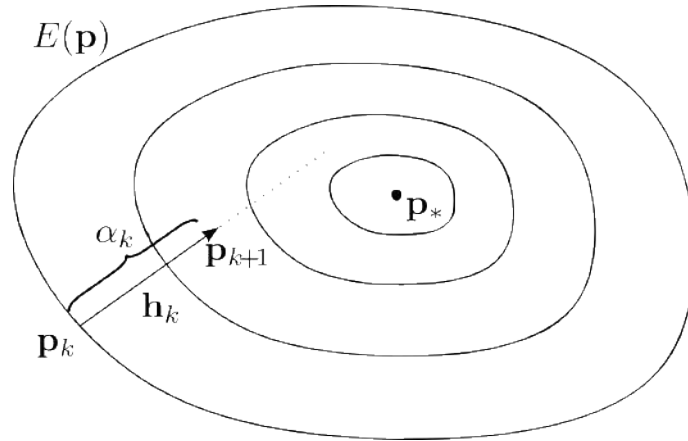


Figura 3.6.1: Representação bidimensional da função objetivo  $E(\mathbf{p})$ , da atualização do modelo  $\mathbf{p}_{k+1}$  e da busca linear  $\alpha$ .

A definição da busca linear exata consiste em resolver o seguinte problema de minimização unidimensional: Encontrar um tamanho de passo  $\alpha$  tal que

$$\min_{\alpha > 0} E(\mathbf{p}_k + \alpha \mathbf{h}_k). \quad (3.6.1)$$

Resolvendo a Equação 3.6.1 exata, aproveita-se o máximo da direção  $\mathbf{h}_k$ . Porém, uma busca linear exata pode ser computacionalmente cara, especificamente para o método FWI, onde a cada avaliação da função objetivo requer-se a modelagem de todos os tiros, o que pode representar um alto custo computacional. Ao invés disso, os algoritmos de busca linear geram um número limitado de tentativas de

comprimentos de passos até se encontrar um que fracamente se aproxime do mínimo da Equação 3.6.1. No novo ponto, uma nova direção de busca e passo são calculados e o processo é repetido [47]. Existem diversas condições de algoritmos de busca linear, tais como condições de Wolf, Goldstein e *backtracking* [47]. O algoritmo de busca linear utilizado neste trabalho é conhecido como *backtracking*. Este algoritmo é descrito basicamente como a seguir:

```

escolha  $\alpha_0 > 0$ ,  $\rho \in (0, 1)$ 
colocar  $\alpha \leftarrow \alpha_0$ ,
repetir até que  $E(\mathbf{p}_k + \alpha_k \mathbf{h}_k) \leq E(\mathbf{p}_k)$  ou  $\alpha \leq \alpha_{min}$ 
     $\alpha \leftarrow \rho \alpha$ 
fim repetir
finalizar com  $\alpha_k = \alpha$ 

```

onde  $\alpha_0$  é o passo inicial,  $k$  é o número de iteração e  $\rho$  é o fator de contração.

Para os métodos de Newton e quasi-Newton, o passo inicial  $\alpha_0 = 1$  deve sempre ser usado na primeira tentativa de comprimento de passo. Essa escolha permite que as propriedades de rápida taxa de convergência tenham efeito [47]. Para os métodos que não produzam uma direção bem escalada, tais como os métodos gradiente e gradiente-conjugados, é importante utilizar informação atual sobre o problema e o algoritmo para estabelecer a escolha inicial de  $\alpha_0$ .

Especificamente para o método FWI, utilizando conhecimentos geofísicos *a priori*, pode-se estabelecer valores aceitáveis, como limites máximo e mínimo de velocidades, e buscar atualizações que não estejam muito distantes do modelo almejado. Assim, para os métodos gradiente-descendente e gradiente-conjugado pode ser usado o seguinte critério para obter comprimento de passo em cada iteração [47]:

$$\alpha_0 = f_{at} * \max \left( \frac{\mathbf{p}_k}{\mathbf{h}_k} \right). \quad (3.6.2)$$

A Equação 3.6.2 significa que o passo inicial é especificado através de uma atualização máxima do modelo, dado por um valor inicial  $f_{at}$ . O valor de  $f_{at}$  é escolhido pelo usuário e é tipicamente da ordem de 1 a 10%. Para as iterações subsequentes, a estratégia é que seja o mesmo  $f_{at}$  utilizado na iteração anterior. Existem outros critérios para estimar o primeiro  $\alpha$ , como uma modelagem de Born.

Um tamanho de passo aceitável é obtido depois de um número finito de tentativas, pois  $\alpha_k$  eventualmente se tornará muito pequeno, tal que a condição de decréscimo irá encerrar a iteração. Se a condição de decréscimo da função objetivo não tiver sido satisfeita, o algoritmo *backtracking* é interrompido quando o parâmetro de busca linear for tal que a atualização máxima do modelo seja menor que 0,1%, encerrando o passo ou iteração.

## 3.7 Aplicações numéricas

Nesta seção estão apresentados os resultados numéricos das implementações de FWI para meios 2D isotrópicos acústicos no domínio da frequência, em que foram realizados testes para diferentes métodos de otimização locais. Os resultados foram gerados com a finalidade de verificar o funcionamento do método de inversão FWI comparando-se o desempenho dos diferentes métodos de otimização no que tange a taxa de convergência e robustez.

No caso de uma inversão no domínio da frequência utilizando dados reais, onde dado registrado está em tempo, é necessário transformar cada traço sísmico para o domínio da frequência. Um número complexo pode então ser utilizado para descrever uma determinada componente de frequência de um traço sísmico. A amplitude da onda e a fase do sinal sísmico são incluídos nas partes real e imaginária do número complexo.

Uma das motivações para o uso do FWI no domínio da frequência para o caso 2D é o custo computacional, que é proporcional somente ao número de frequências utilizadas na inversão<sup>1</sup> e não ao número de fontes, como é o caso no domínio do tempo. O domínio da frequência tem o benefício de que pode-se selecionar apenas algumas frequências discretas para a inversão [66]. Se o dado sísmico contém componentes de afastamentos entre fonte e receptor (*offset*) longos, há uma redundância no espectro de número de onda que é projetado no modelo. Tal redundância pode ser explorada com FWI neste domínio, através da inversão de poucas frequências, sendo possível inverter uma frequência de cada vez (método de multi-escala de frequência) [12, 60]. Desta forma, é reduzido o custo computacional. Outra vantagem significativa para o caso 2D com a implementação neste domínio é a facilidade e eficiência na simulação de múltiplas fontes independentes [72].

A inversão no domínio da frequência neste capítulo está restrita a modelagem acústica. Neste domínio, foram realizadas comparações entre os métodos de otimização gradiente-descente, gradientes-conjugados Polak-Ribière e Fletcher-Reeves e o quasi-Newton (l-BFGS).

### 3.7.1 Modelagem

O dado observado foi gerado de forma sintética por uma modelagem acústica no domínio da frequência, através do método das diferenças finitas (MDF) com malhas mistas de estêncil de 9 pontos, que consiste em um sistema de coordenadas Cartesiano convencional e sistema de coordenadas rotacionado de 45°, como descrito

---

<sup>1</sup>O custo computacional é proporcional ao número de frequências considerando a resolução do sistema direto e desprezando o custo associado a retro-substituição das fontes, que tem uma complexidade computacional uma ordem de grandeza menor.

em HUSTEDT *et al.* [28]. A atenuação das reflexões nas bordas do modelo foi efetuada utilizando camadas absorventes com acoplamento perfeito PML (*Perfect Match Layer*), proposta por BERENGER [5]. A implementação e validação do código utilizado nesta modelagem foi apresentada por DUARTE [18].

O modelo verdadeiro sintético utilizado foi o Marmousi 2D acústico, desenvolvido pelo Instituto Francês de Petróleo, baseando-se na geologia da bacia de Cuanza [8], que representa uma estrutura de subsuperfície complexa. Este modelo foi redimensionado para os números de pontos  $575 \times 187$ , com espaçamento de 12 metros nas direções horizontal e vertical, o que dá ao modelo as dimensões de 6888 metros na horizontal e 2232 metros na vertical.

Foram injetados um total de 57 tiros independentes com espaçamento regular de 120 metros ao longo da direção do afastamento (*offset*) a uma profundidade (*datum*) de 36 metros. Os 574 receptores foram distribuídos regularmente com espaçamento de 12 metros ao longo da direção horizontal na mesma profundidade dos tiros. A espessura da camada PML foi de 468 metros em todas as direções. Os principais parâmetros referentes ao arranjo de aquisição encontram-se na Tabela 3.1.

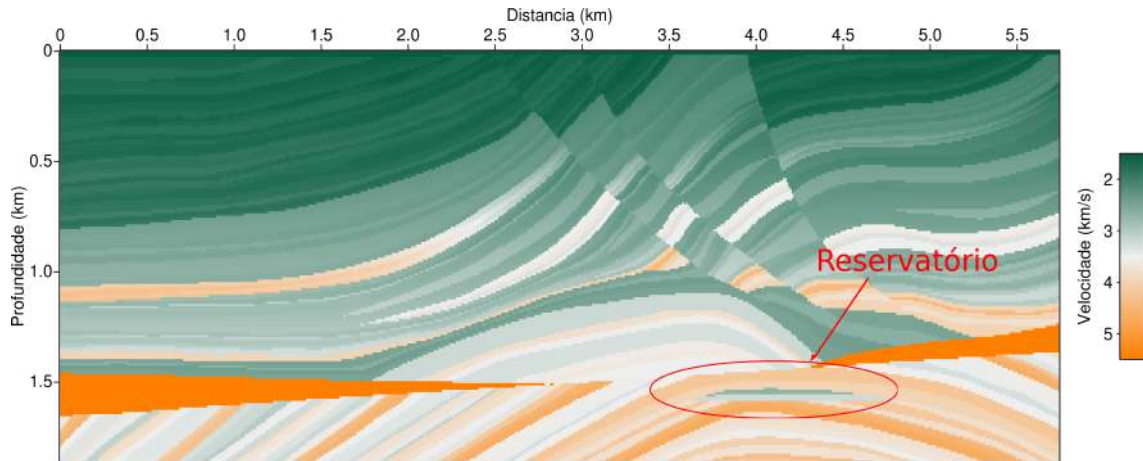


Figura 3.7.1: Modelo de velocidades Marmousi. O reservatório está localizado a uma profundidade de 1600 metros.



Tabela 3.1: Parâmetros da modelagem no domínio da frequência.

Parâmetros da modelagem	
Dimensões do modelo (em pontos)	$575 \times 187$
Espaçamento da malha ( $h$ )	12,0 m
Número de receptores	574
Bordas PML	40 pontos (480 m)
Número de tiros	57
Intervalo de tiro	10 (120 m)
Passos de tempo	0,0015 s
Número de passos total	2048
Frequência de corte	30,0 Hz
Frequência mínima	0,325 Hz
Intervalo de frequências	0,325 Hz

### 3.7.2 Inversão

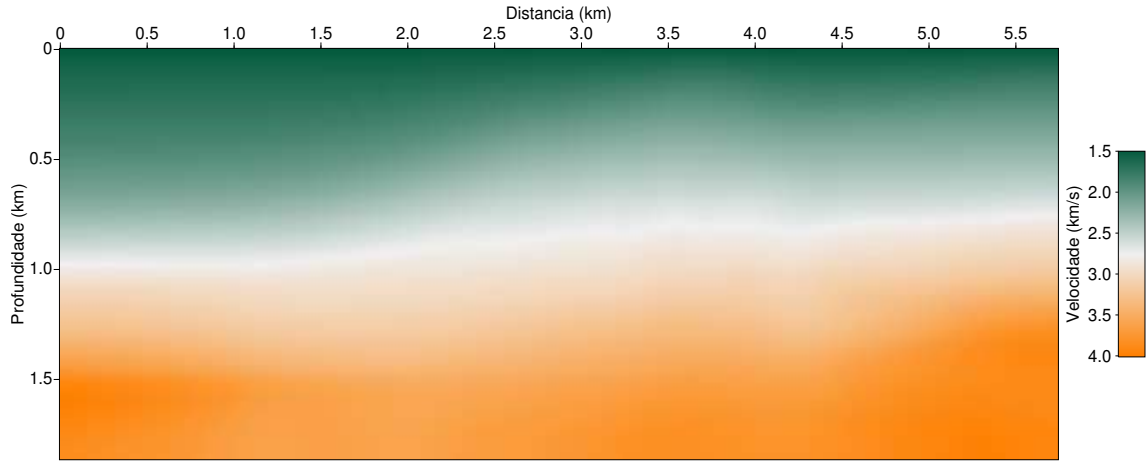
Para a inversão por FWI são necessários como dado de entrada um modelo inicial, o dado observado (neste caso gerado sinteticamente, conforme descrito na Subseção 3.7.1) e assinatura da fonte. A análise foi feita para dois modelos iniciais distintos:

- Modelo 1: obtido através da suavização do modelo verdadeiro via mínimos quadrados amortecido<sup>2</sup>, com um fator de suavização de 50 pontos em ambas as direções, horizontal e vertical. Este modelo está representado na Figura 3.7.2a.
- Modelo 2: é um modelo 1D gerado a partir da extensão horizontal do perfil de velocidade em profundidade situado na posição horizontal  $x = 2880$  m do modelo verdadeiro. Este possui uma suavização utilizando 30 pontos na direção vertical. Este modelo está representado na Figura 3.7.2b.

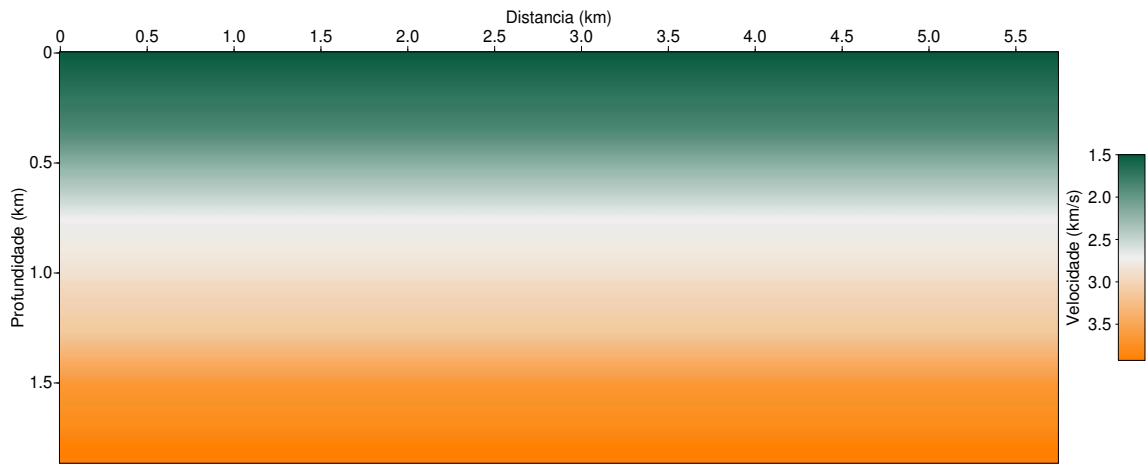
O algoritmo de inversão foi executado utilizando a técnica de multi-escala de frequências (iniciando das baixas frequências às altas) de forma iterativa como apresentado na Equação 2.3.4. A atualização do modelo foi feita utilizando os métodos de otimização do gradiente descendente, gradientes-conjugados (Polak-Ribière e Fletcher-Reeves) e o quasi-Newton (l-BFGS), apresentados na Seção 2.5. Os parâmetros utilizados para a inversão estão apresentados na Tabela 3.2.

Para o uso da técnica de multi-escala, foram selecionadas 22 componentes de frequência, das 91 componentes contidas no dado observado. Para cada frequência foram realizadas até 30 iterações.

<sup>2</sup>Utilizando o comando `smooth2` do pacote Seismic Unix do Center of Wave Phenomena do Colorado School of Mines.



(a) Modelo 1.



(b) Modelo 2.

Figura 3.7.2: Modelos iniciais utilizados para a inversão por FWI. Em (a) encontra-se o modelo 1, que é uma versão do modelo verdadeiro suavizada com 50 pontos nas direções vertical e horizontal. Em (b) encontra-se o modelo 2, que é considerado um modelo 1D, que é obtido a partir do perfil de velocidade em profundidade situado na posição horizontal  $x = 2880$  m do modelo apresentado na Figura 3.7.1.

O fluxo para a inversão por FWI consiste de sete passos executados de forma iterativa, tendo como atributos de entrada o dado observado e o modelo inicial  $\mathbf{p}_0$ :

1. Faz-se a modelagem para geração do dado calculado  $\mathbf{d}_{cal}$  utilizando-se o modelo atualizado da iteração  $k - 1$ ;
2. Calcula-se o resíduo ( $\delta\mathbf{d} = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{cal}$ ), que é a diferença entre o dado observado e o dado calculado para o modelo atual  $\mathbf{p}_k$ ;
3. Faz-se a retropropagação do resíduo  $\delta\mathbf{d}$ ;
4. Calcula-se o gradiente  $\mathbf{g}_k = \nabla_p E_k$ ;
5. Obtém-se um comprimento de passo  $\alpha_k$  na direção de busca  $\mathbf{h}_k$ ;  
Se  $\alpha < \alpha_{min}$  fim da iteração.
6. Faz-se o cálculo do modelo atualizado  $\mathbf{p}_{k+1}$  (como na Equação 2.3.4);
7. Avalia-se a função objetivo  $E(\mathbf{p}_{k+1})$   
Se  $E(\mathbf{p}_{k+1}) \geq E(\mathbf{p}_k)$ : retornar ao passo 5.  
Se  $E(\mathbf{p}_{k+1}) < E(\mathbf{p}_k)$ : reinicia nova iteração a partir do passo 1.

Tabela 3.2: Parâmetros da Inversão no domínio da frequência.

Parâmetros da inversão	
Frequência inicial	3,58 Hz
Intervalo de frequência	1,24 Hz
Frequência final	29,62 Hz
Passo inicial $\alpha_0$ <sup>3</sup>	20% da velocidade
Passo mínimo $\alpha_{min}$ <sup>4</sup>	0,1% da velocidade
Fator de contração $\rho$	0,5
Número de iterações por frequência	30
Número de iterações anteriores $M$ (somente l-BFGS)	15

### 3.7.3 Resultados

Os resultados da inversão utilizando os modelos iniciais 1 e 2 estão ilustrados, respectivamente, nas Figuras 3.7.3 e 3.7.4. Pode-se afirmar que os resultados de todos os métodos de otimização analisados se aproximaram do modelo verdadeiro, inclusive a região do reservatório, que é a área de maior interesse.

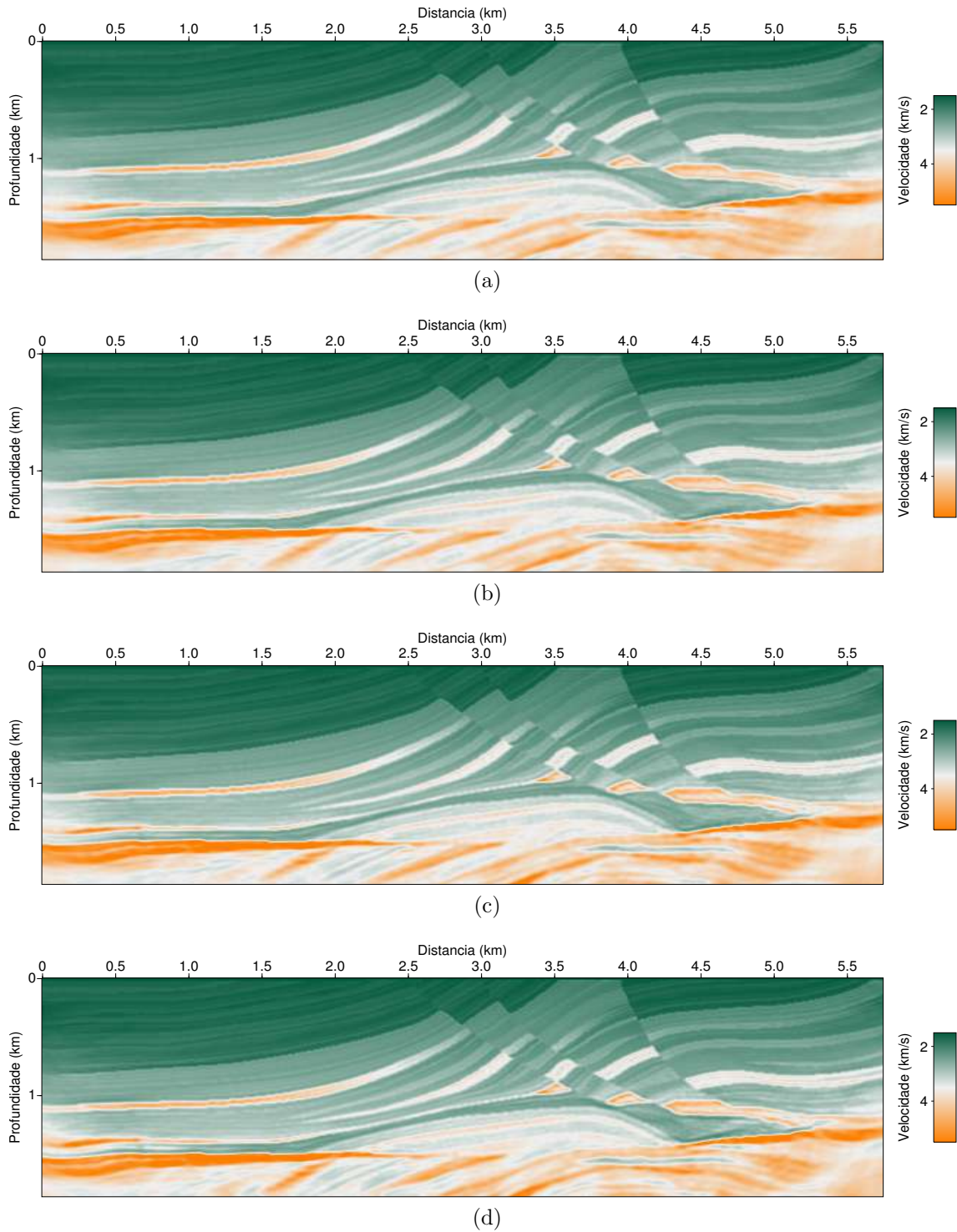


Figura 3.7.3: Resultados dos modelos estimados utilizando o modelo inicial do caso 1. Em (a) gradiente-descendente; (b) gradiente-conjugado de Polak-Ribière; (c) gradiente-conjugado de Fletcher-Reeves; (d) Quasi-Newton.

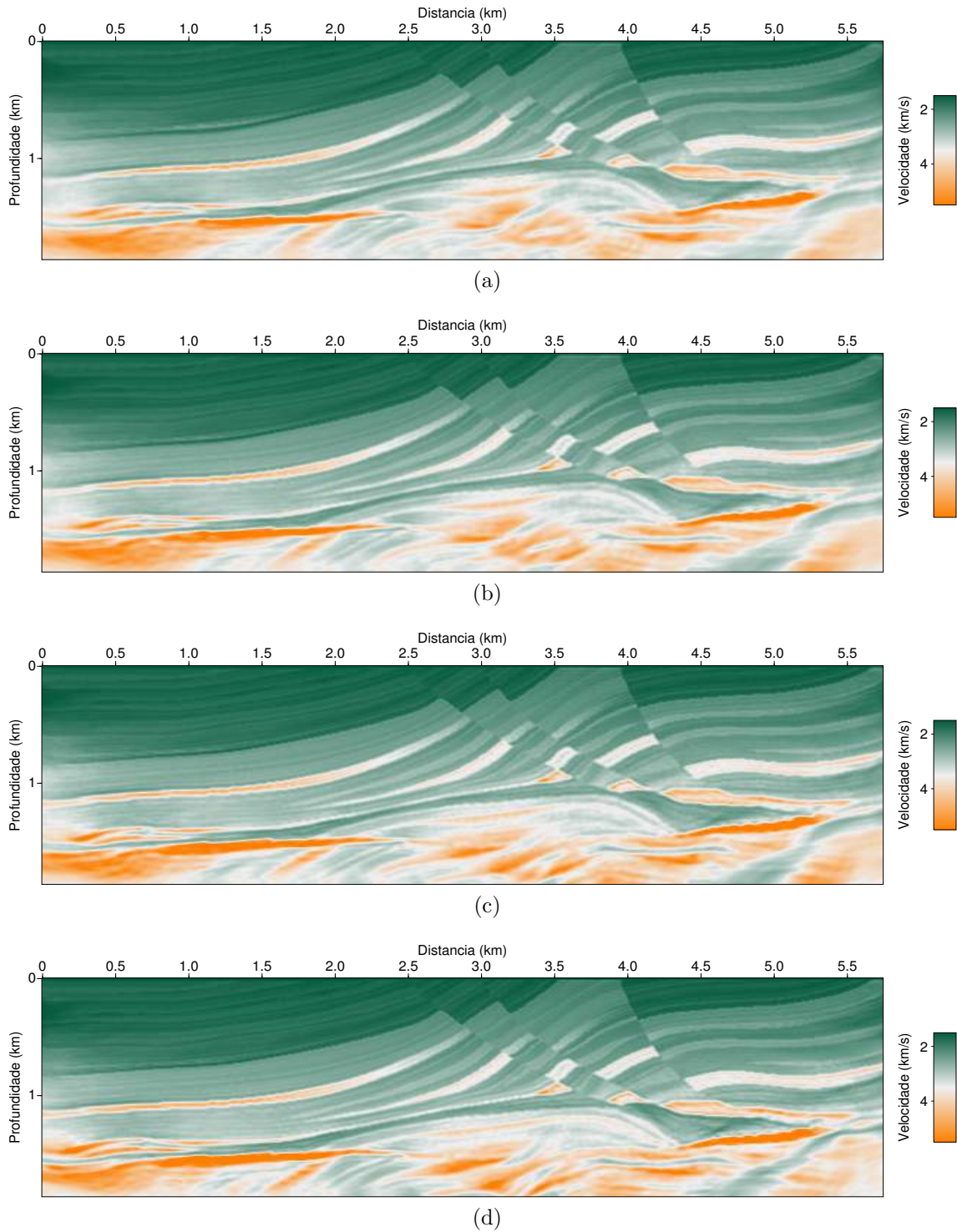
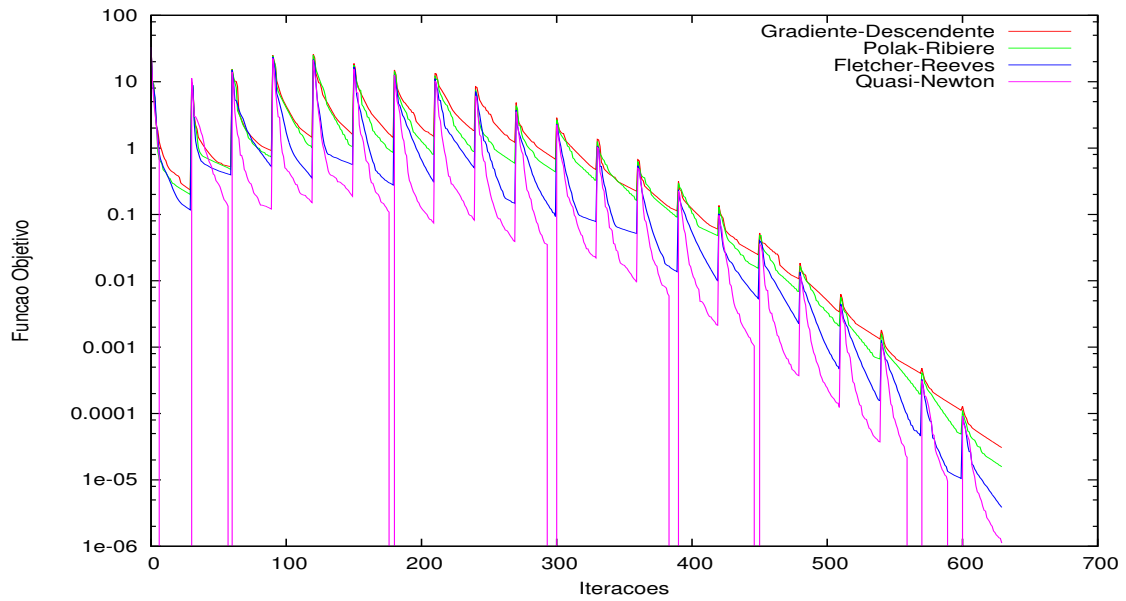
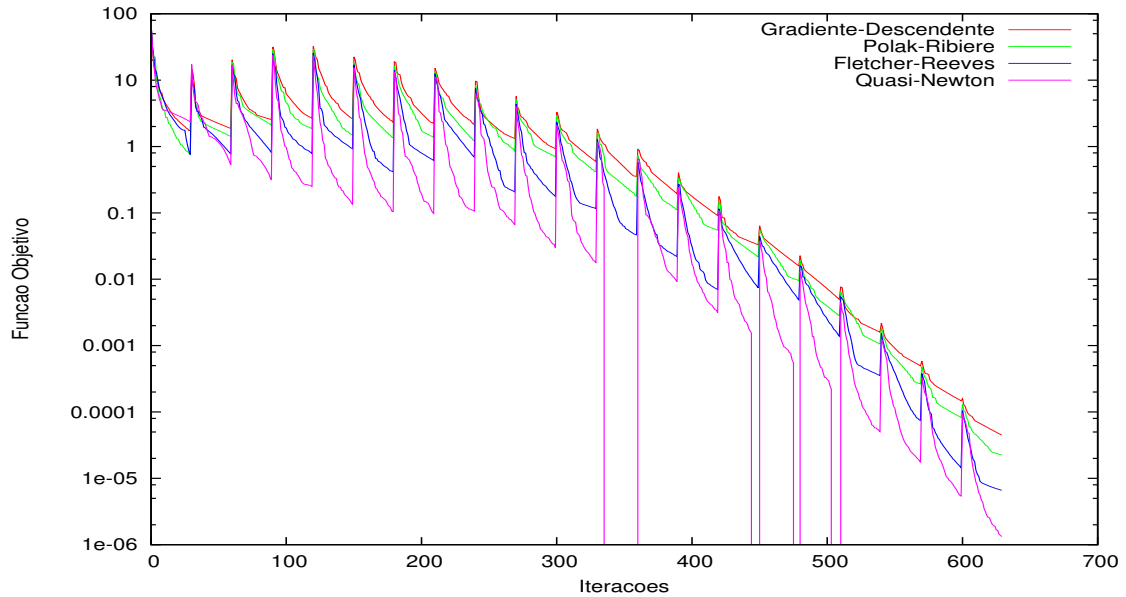


Figura 3.7.4: Resultados dos modelos estimados utilizando o modelo inicial do caso 2. Em (a) gradiente-descendente; (b) gradiente-conjugado de Polak-Ribière; (c) gradiente-conjugado de Fletcher-Reeves; (d) Quasi-Newton.

Uma forma de avaliar os resultados de inversão é observando o comportamento da função objetivo, que deve diminuir a cada iteração, conforme o modelo atualizado se aproxima do verdadeiro. A variação da função objetivo de cada método de otimização está ilustrado na Figura 3.7.5. Observa-se que, para ambos os casos de modelo inicial, o método quasi-Newton possui maior taxa de convergência, enquanto o gradiente possui a menor. Esse resultado é reforçado pela teoria descrita na literatura especializada [47]. Uma observação adicional é a existência de descontinuidades na curva da função objetivo do método quasi-Newton. Neste caso, ocorreu que menos de 30 iteração foram suficientes para que o algoritmo atingisse o critério de parada. Antes de chegar na trigésima iteração, o algoritmo continuou tentando diminuir o valor da função objetivo, que alcançou o valor de atualização mínimo de 0,1%, que é critério de parada da inversão (definido na Tabela 3.2).



(a)



(b)

Figura 3.7.5: Variação da função objetivo com relação ao número de iterações para todos os métodos de otimização. Em (a) com o modelo inicial do caso 1 e em (b) com o modelo inicial do caso 2.

Uma outra forma de avaliar os resultados é observar o comportamento dos perfis de velocidades entre o modelo verdadeiro e os resultantes de cada inversão. Com esta informação pode-se verificar o quanto o modelo resultante se aproxima do verdadeiro. Os perfis estão compreendidos para os modelos iniciais 1 e 2, respectivamente, nas Figuras 3.7.6 e 3.7.7. Estes perfis foram extraídos de cada modelo na posição horizontal de 4500 metros, que atravessa a região do reservatório, localizado a uma profundidade de aproximadamente 1700 metros. Os perfis de cada método de oti-



mização ficaram bem ajustados ao modelo verdadeiro.

## 3.8 Conclusão

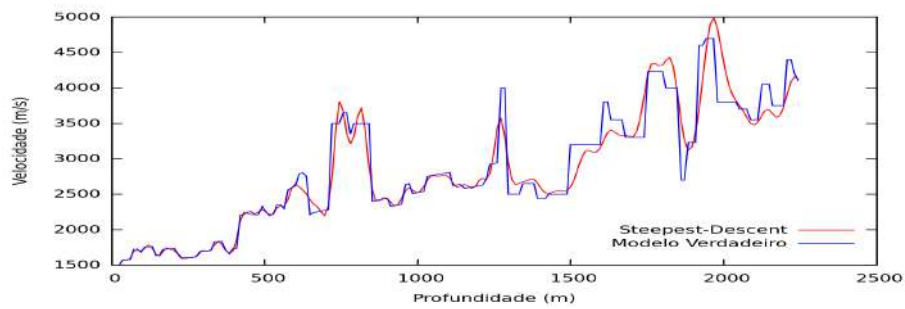
Os resultados convergiram conforme relatado na literatura [47], ou seja, é esperado que o método gradiente-descendente convergiria mais lentamente, enquanto que o método quasi-Newton (l-BFGS) convergiria mais rapidamente, conforme a Figura 3.7.5.

Fatores de contribuição para os bons resultados: a inversão foi aplicada a dados sintéticos sem adição de ruídos; e foi utilizado o mesmo operador de diferenças finitas para geração dos dados modelados e dos dados observados. Para tornar o código mais robusto, deve-se levar em consideração fatores não inseridos nos dados da análise, como adição de ruídos (para avaliar o papel das baixas frequências), conforme o trabalho realizado por DA SILVA [16], uso de métodos de regularização<sup>5</sup> e fazer estimativa de assinatura da fonte PRZEBINDOWSKA [58].

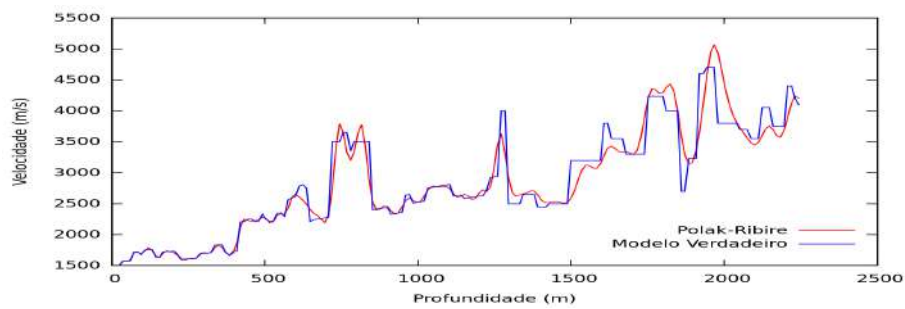
---

<sup>5</sup>Imposição de restrições para estabilização do processo de solução de um problema mal-posto.

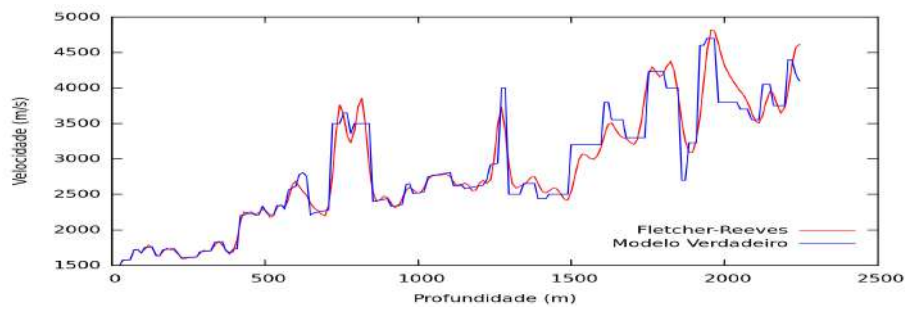




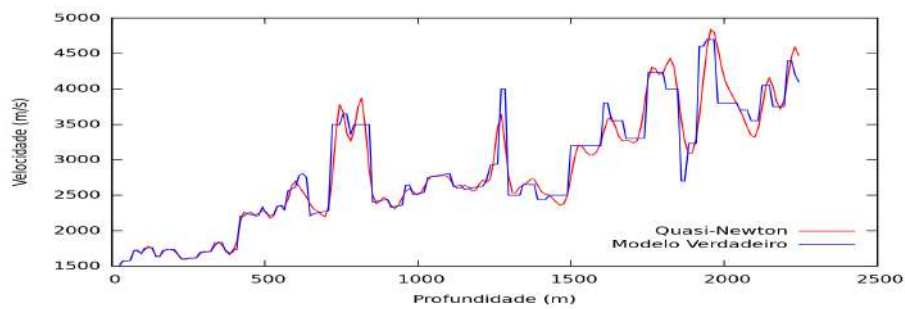
(a)



(b)

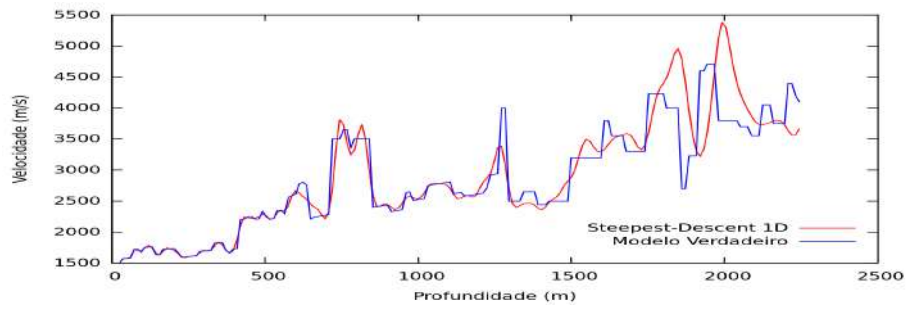


(c)

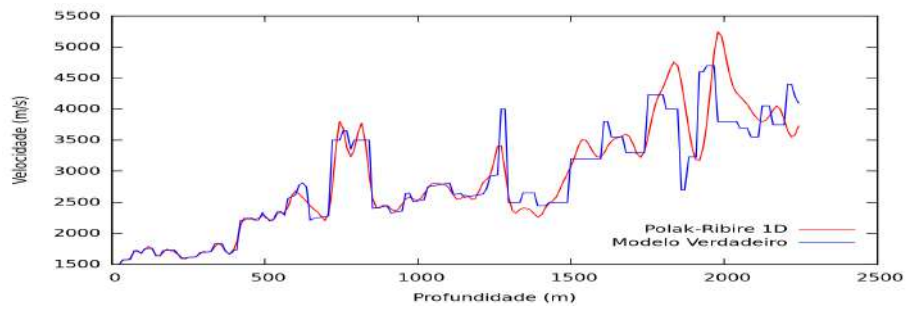


(d)

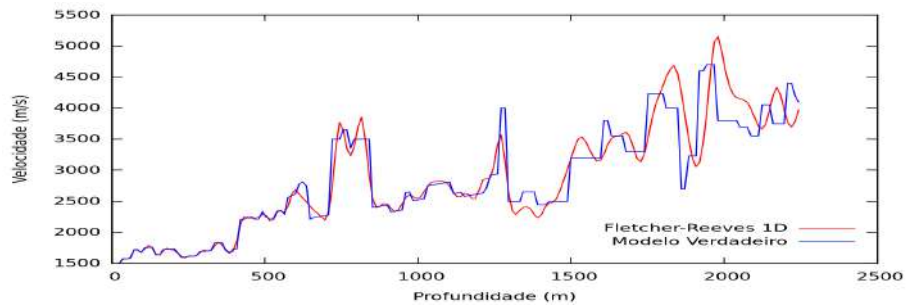
Figura 3.7.6: Perfis de velocidade para o modelo inicial 1. Perfis de velocidades extraídos do ponto da direção do afastamento 4968 metros do modelo alvo. Em todos os perfis estão o modelo verdadeiro, sendo em (a) com gradiente-descendente, em (b) Polak-Ribière, em (c) Fletcher-Reeves e, em (d) quasi-Newton.



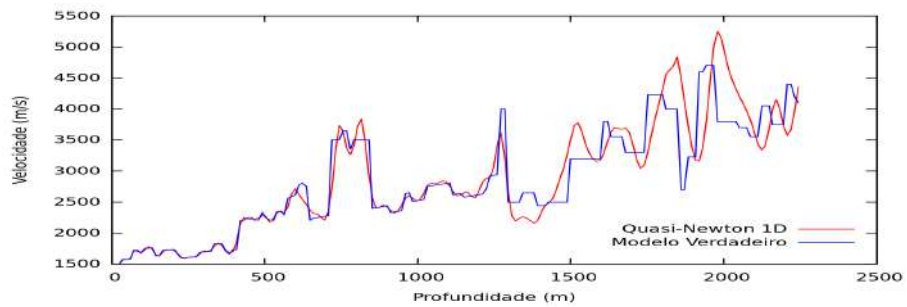
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 3.7.7: Perfis de velocidade para o modelo inicial 2. Perfis de velocidades extraídos do ponto da direção do afastamento 4968 metros para o modelo do caso 2. Em todos os perfis estão o modelo verdadeiro. Sendo em (a) o gradiente-descendente, em (b) Polak-Ribière, em (c) Fletcher-Reeves e, em (d) quasi-Newton.

# Capítulo 4

## Inversão acústica de dados acústico e elástico

### 4.1 Introdução

Na indústria, o método FWI acústico é usado amplamente para atualização de modelos de velocidade de onda compressional (onda-P) e, portanto parâmetros elásticos não são levados em consideração. Este capítulo tem como propósito comparar os efeitos da inversão acústica com dados acústico e elástico, pois é esperado que estes dados possuam diferenças de amplitude. No dado elástico é possível ter eventos de onda cisalhante (onda-S), além de ser mais próximo das relações de amplitude de um dado real. A importância desta comparação é verificar o impacto gerado nos resultados quando não se considera parâmetros elásticos no algoritmo de FWI.

Quando considera-se o meio elástico, uma frente de onda-P, que atinge uma interface com variação de impedância, tem sua energia particionada em ondas P e S. A onda S é sempre mais lenta que a onda P. O diagrama dos ângulos de incidência, de reflexão e de refração da onda S está ilustrado na Figura 4.1.1. O conjunto de equações que descrevem o particionamento da energia das ondas sísmicas em uma interface entre duas camadas são conhecidas como equações de Zoeppritz [86]. Estas equações relacionam as amplitudes da onda P incidente com as amplitudes das ondas P e S refletidas e refratadas ao ângulo de incidência.

A fim de ilustrar os efeitos dos modos de onda para a refletividade P-P em meios acústico e elástico, foi utilizada a plataforma *Zoeppritz Explorer*<sup>1</sup>, conforme ilustra a Figura 4.1.2. Neste caso, considerou-se os seguintes meios de duas camadas:

- Meio 1: é um meio acústico de densidade constante ( $\rho = \text{cte.}$ ), portanto  $v_s$  não

---

<sup>1</sup> Plataforma da página *CREWES.org* da Universidade de Calgary

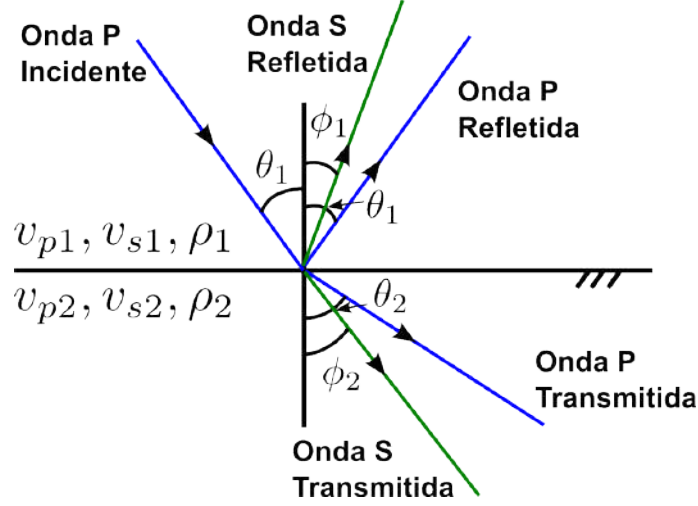


Figura 4.1.1: Modos de conversão das ondas P e S.

é considerado. Na camada 1  $v_{p1} = 1500$  m/s e na camada 2  $v_{p2} = 1600$  m/s.

- Meio 2: é um meio elástico de densidade constante ( $\rho = \text{cte.}$ ). Na camada 1  $v_{p1} = 1500$  m/s, com  $v_{s1} = 0$  m/s e na camada 2  $v_{p2} = 1600$  m/s e  $v_{s2} = 900$  m/s.

Observam-se diferenças de comportamento de amplitude com relação ao ângulo de incidência quando consideram-se meios acústico e elástico. Portanto, com estas informações pode-se avaliar a importância de se considerar uma inversão de FWI elástica, ao invés de somente acústico, uma vez que um dado adquirido numa aquisição real possui efeitos resultantes de parâmetros elásticos.

A aplicação numérica deste estudo é focada em avaliar as diferenças dos resultados de inversão com FWI acústico utilizando dados de entrada sintéticos provenientes das modelagens acústica e elástica.

## 4.2 Aplicações numéricas

Esta aplicação numérica consiste em realizar dois casos de inversão acústica isotrópica 2D: o primeiro caso utiliza dado acústico e o segundo dado elástico.

Nas próximas seções estão descritas as implementações de ambas modelagens para geração dos dados sintéticos, da inversão, discussão dos resultados e, por fim conclusão.

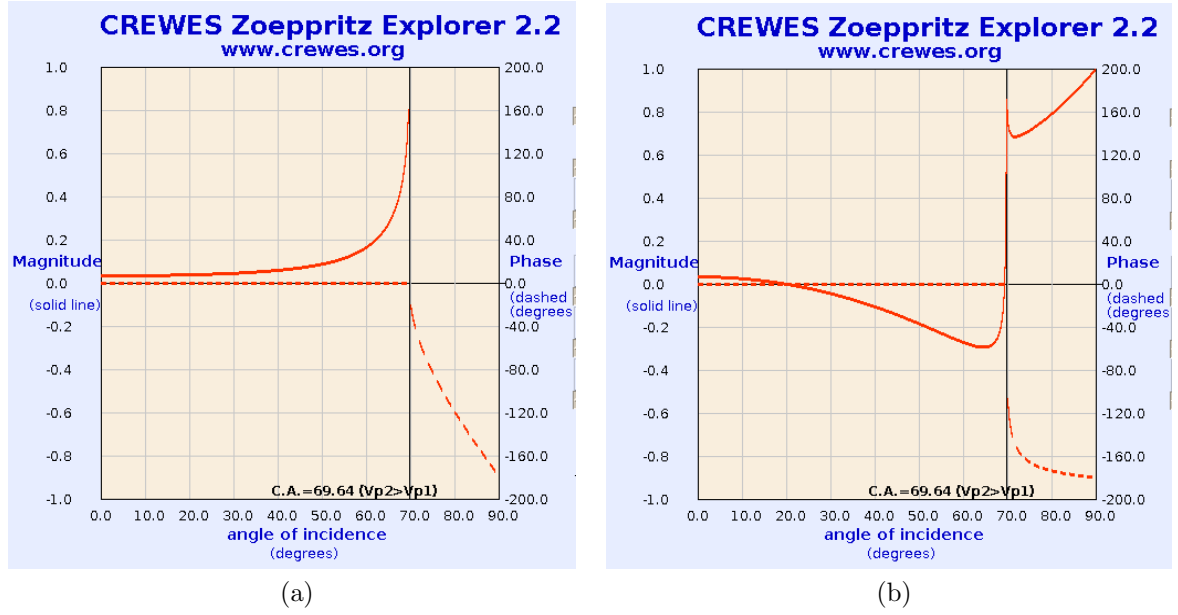


Figura 4.1.2: Refletividade P-P para meios (a) acústico e (b) elástico.

## 4.2.1 Modelagem

Esta seção apresenta dois casos de modelagens para geração de dados sintéticos: acústico e elástico. Ambas modelagens são realizadas no domínio do tempo, utilizando o método das diferenças finitas (MDF). As especificações das implementações de cada caso são descritas a seguir:

### 1. Caso acústico:

A modelagem acústica utiliza malha simples, com aproximação de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo. A atenuação das reflexões nas bordas foi efetuada com condições de bordas de REYNOLDS [61] e bordas de CERJAN *et al.* [14].

### 2. Caso elástico:

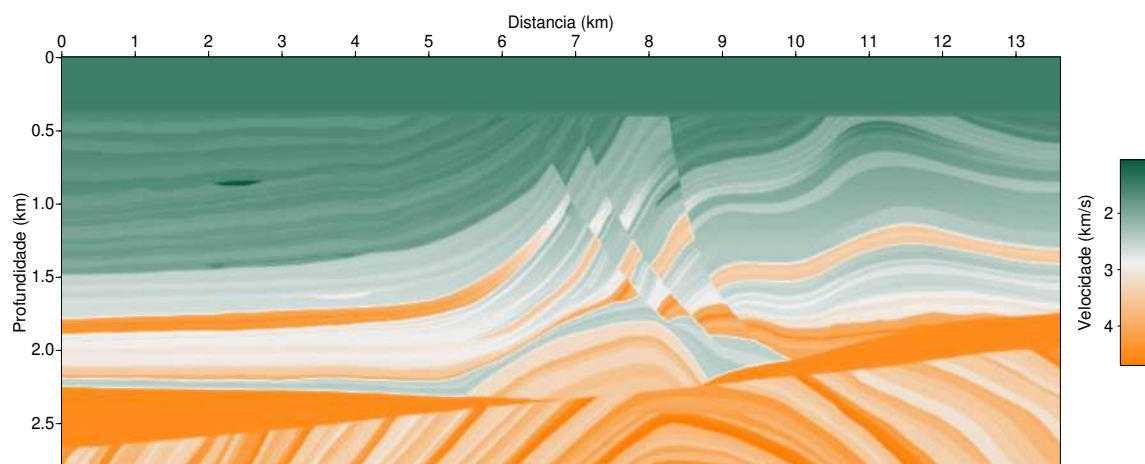
A modelagem elástica foi baseada na formulação da equação da onda  $P$ - $SV$ , como a proposta por VIRIEUX [78], com a aproximação de quarta ordem apresentada por LEVANDER [38]. Assim, como na modelagem acústica no tempo, também foi utilizada condições de bordas de REYNOLDS [61] e bordas de CERJAN *et al.* [14]. O Apêndice B.2 fornece mais detalhes das modelagens acústica e elástica no domínio do tempo.

O modelo verdadeiro utilizado para esta análise é o Marmousi-2 [42]. Na Figura 4.2.1 estão ilustrados os três modelos verdadeiros de cada parâmetro elástico, sendo na Figura 4.2.1a o modelo de velocidade de onda compressional  $v_p$ , na Figura 4.2.1b o

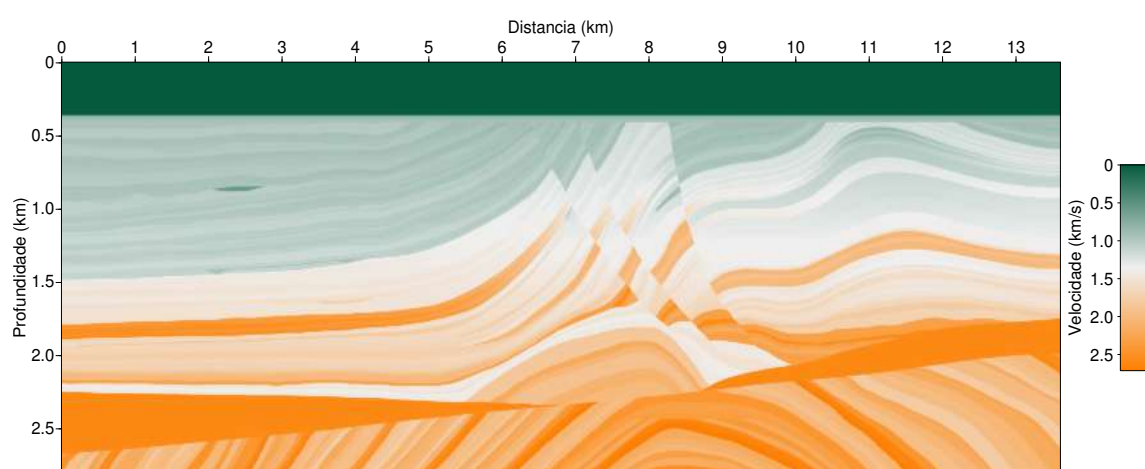
modelo de velocidade de onda cisalhante  $v_s$  e na Figura 4.2.1c o modelo de densidade  $\rho$ .

A malha foi dividida em  $1361 \times 281$  pontos, nas direções de afastamento e profundidade, respectivamente, com espaçamento de 10 metros nas duas direções. Foram utilizados 68 tiros espaçados regularmente a 200 metros a uma profundidade de 50 metros. Os 1360 receptores foram distribuídos num espaçamento regular de 10 metros a uma profundidade de 30 metros. Para realizar a técnica de multi-escala na inversão, são geradas quatro frequências de corte de 8 a 14 Hz, num intervalo de 2 Hz. Os parâmetros da modelagem estão apresentados na Tabela 4.1.

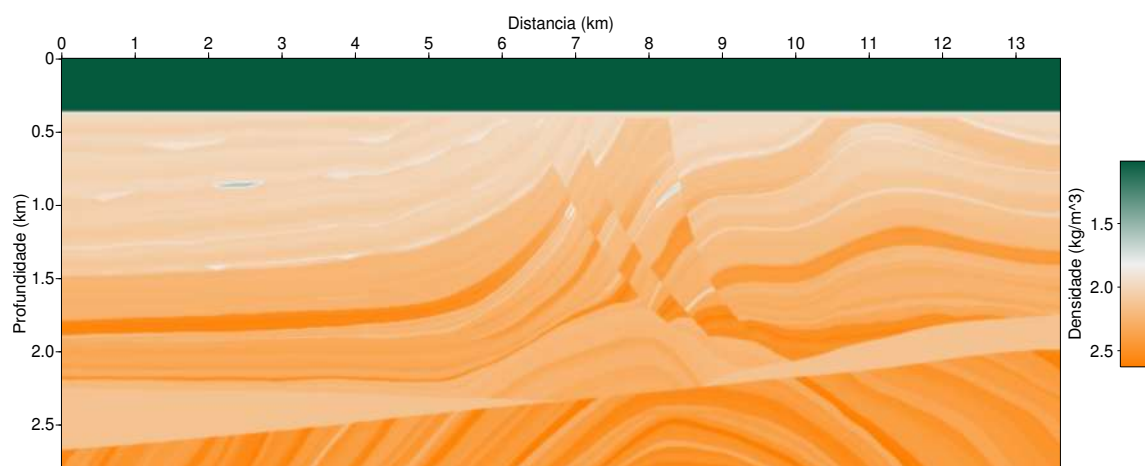
Os resultados obtidos das modelagens de cada caso estão ilustrados nas Figuras 4.2.2 e 4.2.3. A Figura 4.2.4 representa as diferenças entre os sismogramas acústicos e elásticos para cada banda de frequências.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2.1: O modelo verdadeiro Marmousi 2. Em (a) modelo de velocidade onda-P, em (b) modelo de velocidade onda-S e, em (c) modelo de densidade.

Tabela 4.1: Parâmetros da modelagem no domínio do tempo.

Parâmetros da modelagem	
Dimensões do modelo (em pontos)	$1361 \times 281$
Espaçamento da malha ( $h$ )	10,0 m
Bordas Cerjan e Reynolds	100 pontos (1000 m)
Número de tiros	68
Número de receptores	1360
Intervalo de tiro	20 (200 m)
Intervalo de receptores	10 (100 m)
Passos de tempo	0,001 s
Número de passos total	3000
Frequência de corte	14,0 Hz
Frequência inicial	8,0 Hz
Intervalo de frequências	2,0 Hz



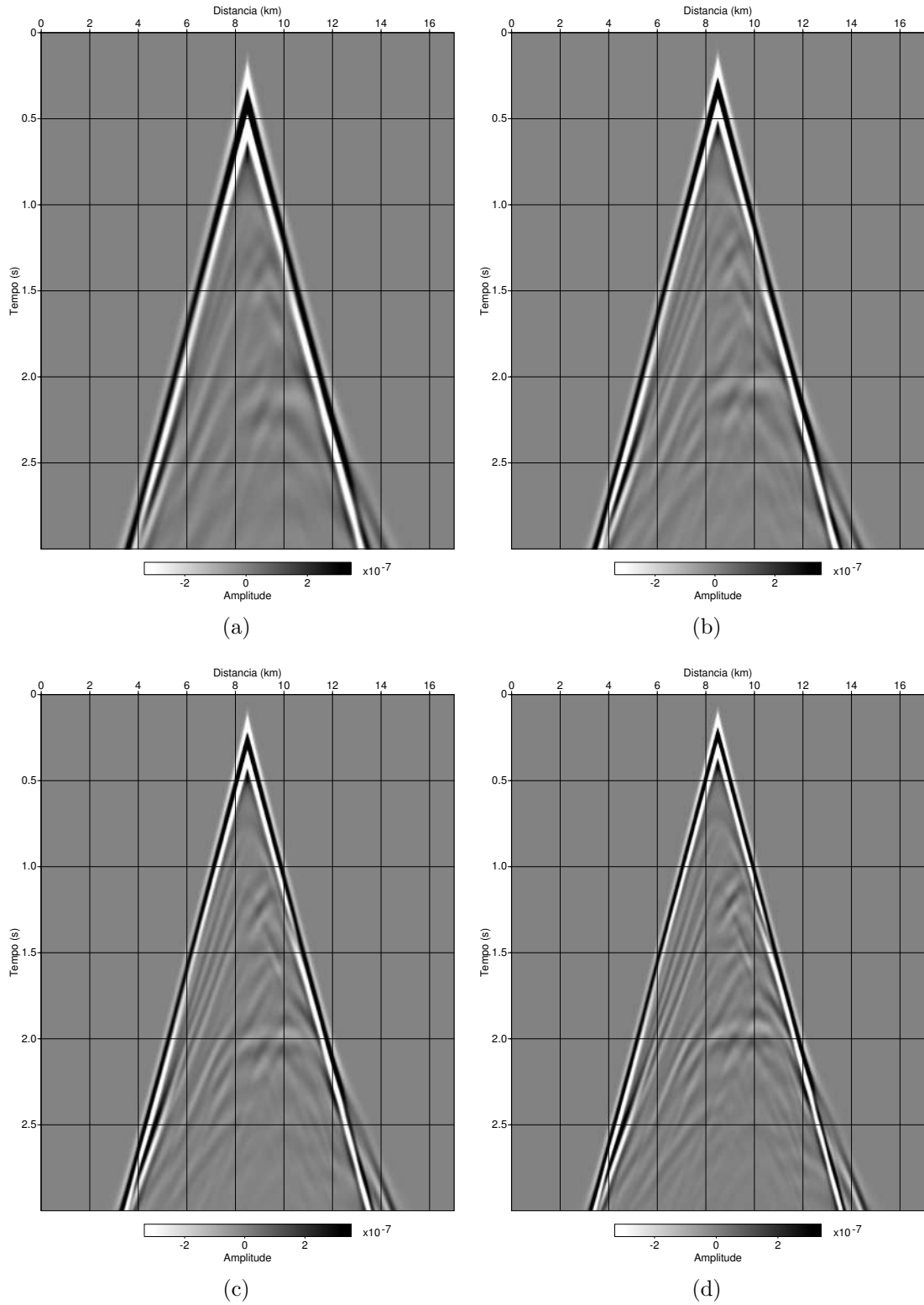


Figura 4.2.2: Sismogramas dos dados acústicos. Em cada sismograma as frequências de corte máximas foram: em (a) 8 Hz, em (b) 10 Hz, em (c) 12 Hz e em (d) 14 Hz.

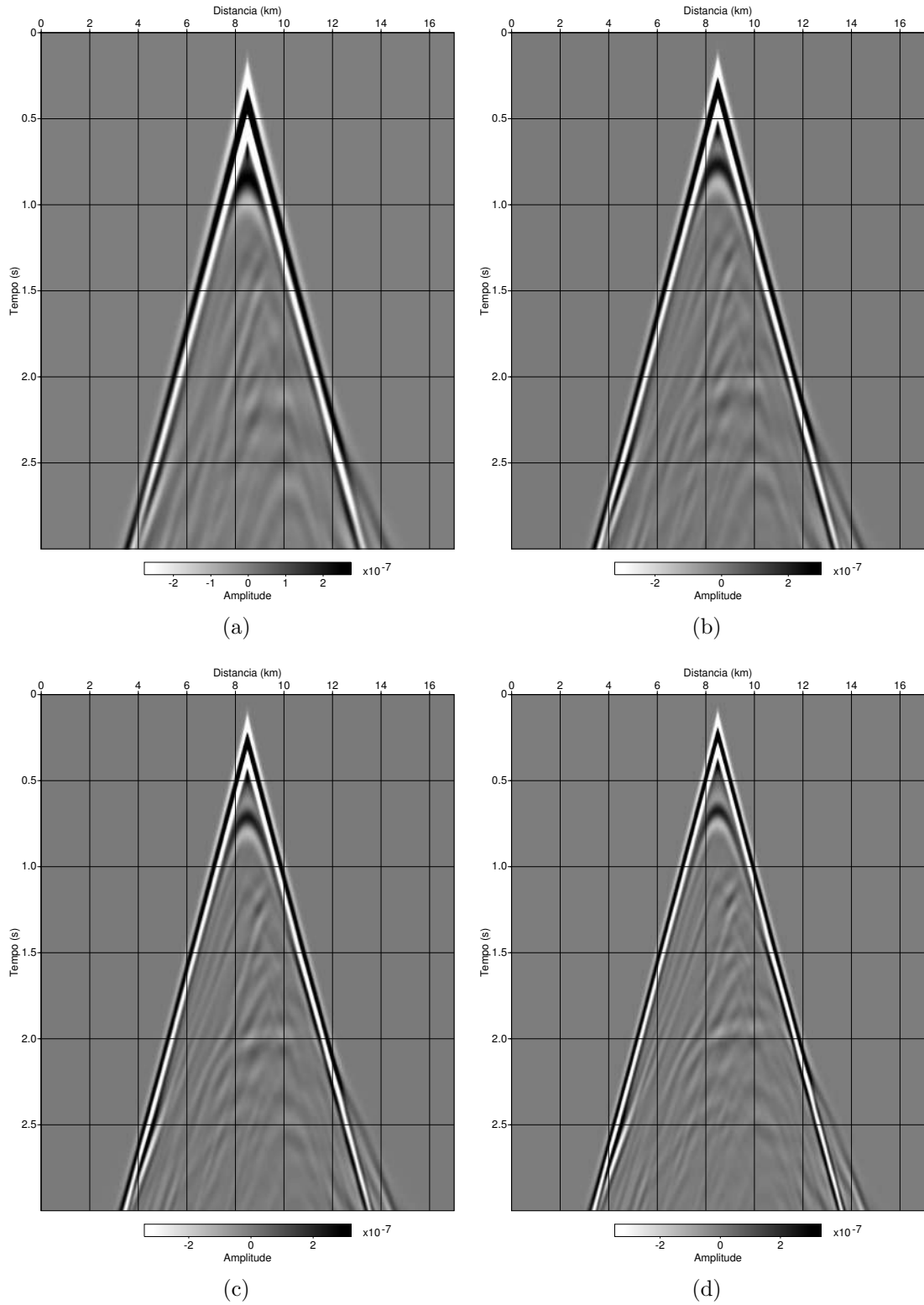


Figura 4.2.3: Sismogramas dos dados elásticos. Em cada sismograma as frequências de corte máximas foram: em (a) 8 Hz, em (b) 10 Hz, em (c) 12 Hz e em (d) 14 Hz.

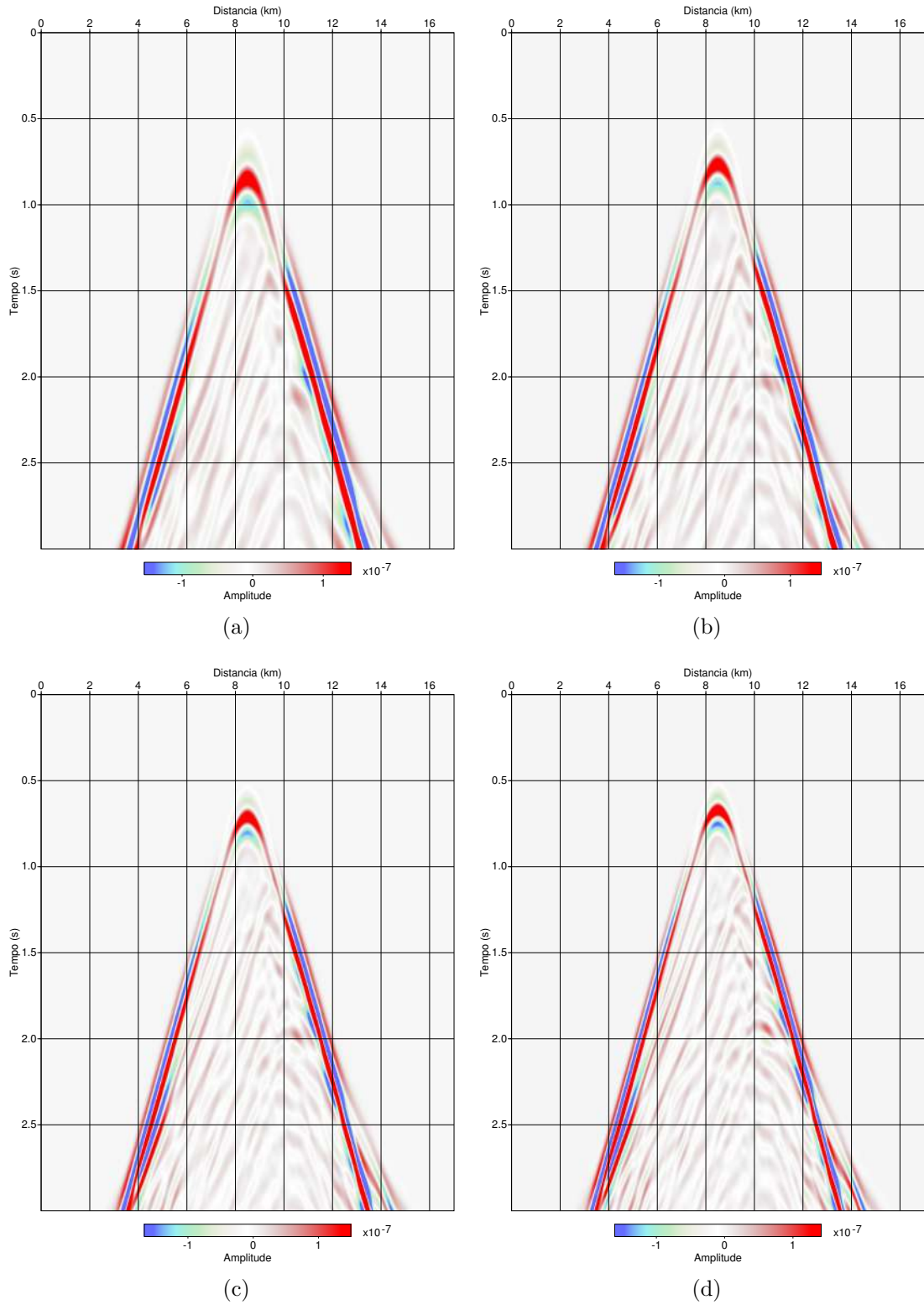


Figura 4.2.4: Diferença entre dado acústico e elástico. Em cada sismograma as frequências máximas foram: em (a) 8 Hz, em (b) 10 Hz, em (c) 12 Hz e em (d) 14 Hz.

### 4.2.2 Inversão

A implementação do método FWI para este experimento é acústico, isotrópico e 2D. A finalidade é observar o comportamento dos resultados de inversão utilizando como entrada dados obtidos do caso 1 (modelagem acústica) e do caso 2 (modelagem elástica). O método de otimização local utilizado é o método gradiente-descendente (descrito na Subseção 3.2).

A opção de implementar a inversão FWI no domínio do tempo, é devido a robustez da modelagem elástica neste domínio na presença de interface sólido-líquido. Além disso, as vantagens de implementação no domínio do tempo incluem facilidade em paralelização e requisitos de memória reduzida, desse modo, fazendo com que o método FWI seja aplicável para grandes modelos e dados 3D. Para dados de grande porte, como uma aquisição sísmica 3D, as modelagens no domínio da frequência exigem acesso a grandes recursos computacionais, com uma resolução direta do sistema linear. Isso porque os métodos diretos (como a fatoração LU) utilizam bastante memória computacional, mesmo utilizando bibliotecas especializadas que aproveitem a esparsidade da matriz fatorada [4].

A inversão nesta aplicação numérica consiste de 10 iterações para cada banda de frequência. Assim como na inversão no domínio da frequência (Seção 3.7), neste caso também é utilizada a técnica de multi-escala em frequência, iniciando das mais baixas frequências às mais altas, em que se limita a frequência máxima dos dados observados e calculados. A Tabela 4.2 apresenta a parametrização da inversão utilizadas nos dois casos.

O modelo inicial (Figura 4.2.5a) é o mesmo para os dois casos, obtido a partir da suavização de 30 pontos nas direções vertical e horizontal do modelo verdadeiro  $v_p$ .

Tabela 4.2: Parâmetros da Inversão no domínio do tempo.

Parâmetros da inversão	
Frequência inicial	8,0 Hz
Intervalo de frequência	2,0 Hz
Frequência final	14,0 Hz
Passo inicial $\alpha_0$	10%
Passo mínimo $\alpha_{min}$	0,1%
Fator de contração $\rho$	0,50
Número de iterações por banda de frequência	10

### 4.2.3 Resultados

Na Figura 4.2.5b está apresentado o resultado da inversão do modelo de  $v_p$  com dado de entrada acústico e em 4.2.5c o resultado da inversão do modelo de  $v_p$  com dado de entrada elástico.

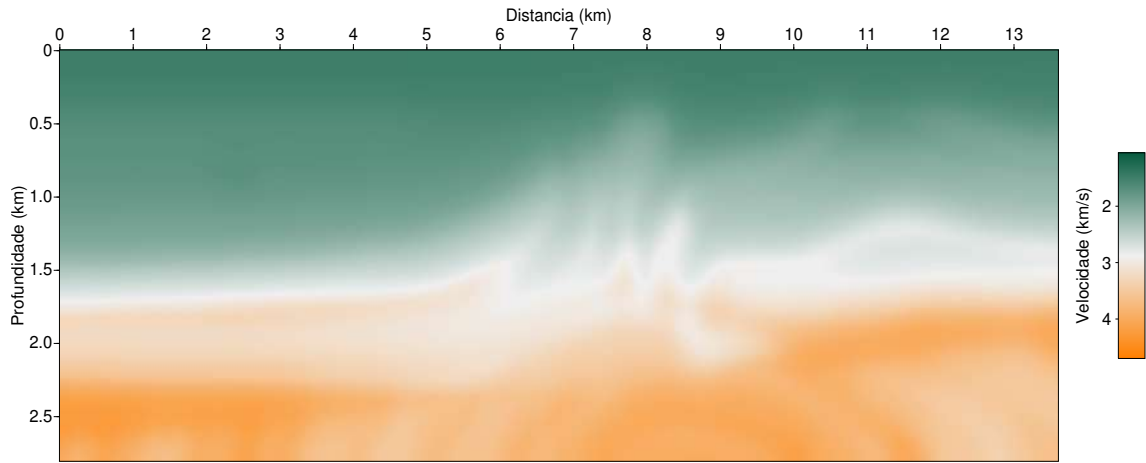
A Figura 4.2.6 ilustra os erros relativos entre os modelos resultantes das inversões e o modelo verdadeiro, sendo em 4.2.6a com o resultado da inversão de dado acústico e, em 4.2.6b de dado elástico. O erro relativo é calculado por

$$E_{rel} = \frac{\text{mod}_{verdadeiro} - \text{mod}_{resultante}}{\text{mod}_{verdadeiro}}. \quad (4.2.1)$$

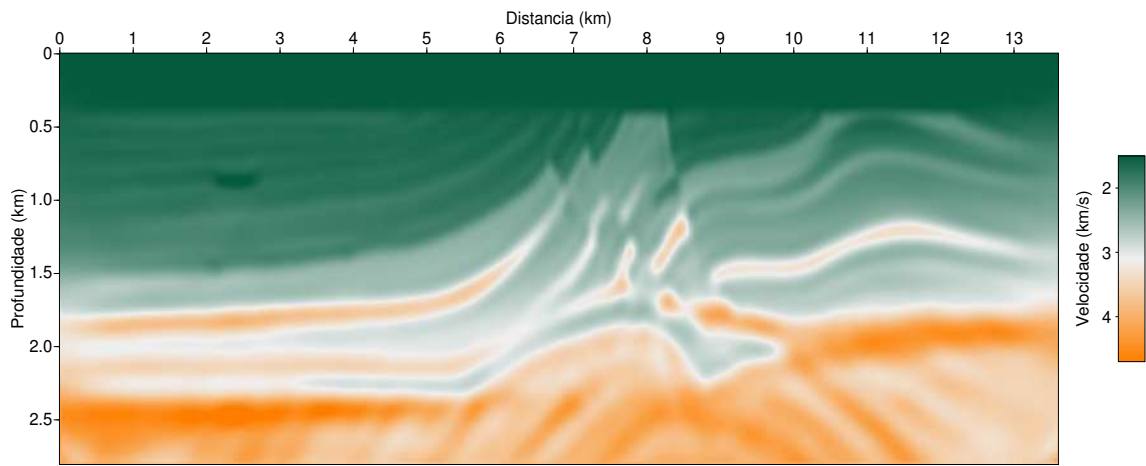
Verifica-se que na imagem do erro relativo do resultado da inversão com dado acústico (Figura 4.2.6a), os tons das camadas de maior contraste ficaram mais claros que na imagem resultante do erro relativo com o dado elástico (Figura 4.2.6b). Portanto, valores das velocidades  $v_p$  na matriz do modelo recuperado a partir da inversão com dado acústico ficaram mais similares ao modelo verdadeiro. Isso significa que, quando o dado é elástico, a conversão de energia das ondas não está sendo honrada na modelagem para obtenção do dado calculado na inversão.

Através do comportamento da função objetivo para ambos casos (apresentado nos gráficos da Figura 4.2.7), observa-se que a taxa de convergência da inversão para o caso elástico foi mais lenta, sustentando a análise do resultado do erro relativo.

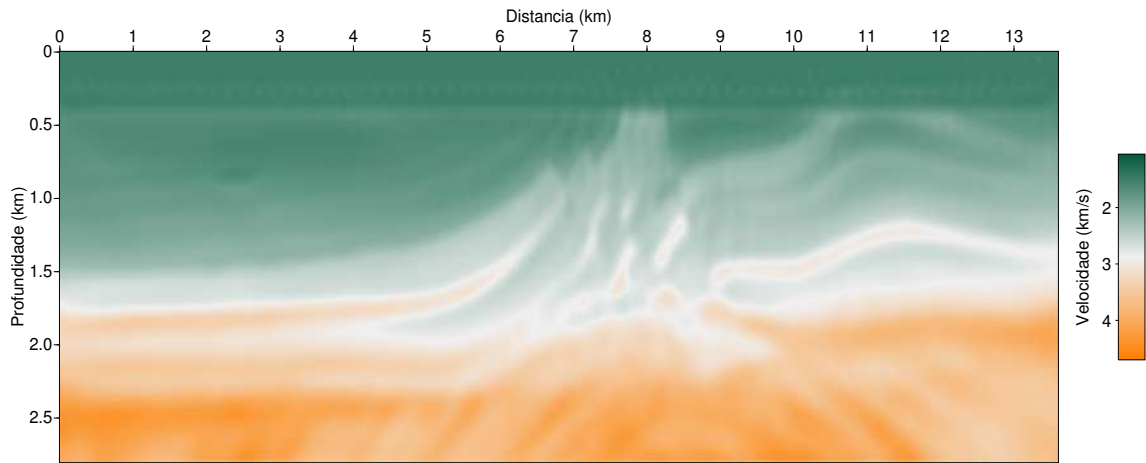
Uma forma de comparação dos modelos é verificar seus efeitos em uma migração. Para esta análise foram realizadas migrações reversa no tempo (RTM) utilizando os modelos verdadeiro, inicial, o resultante da inversão para o caso 1 (dado acústico) e o resultante da inversão para o caso 2 (dado elástico). Na Figura 4.2.8 estão apresentados os resultados destas migrações.



(a)

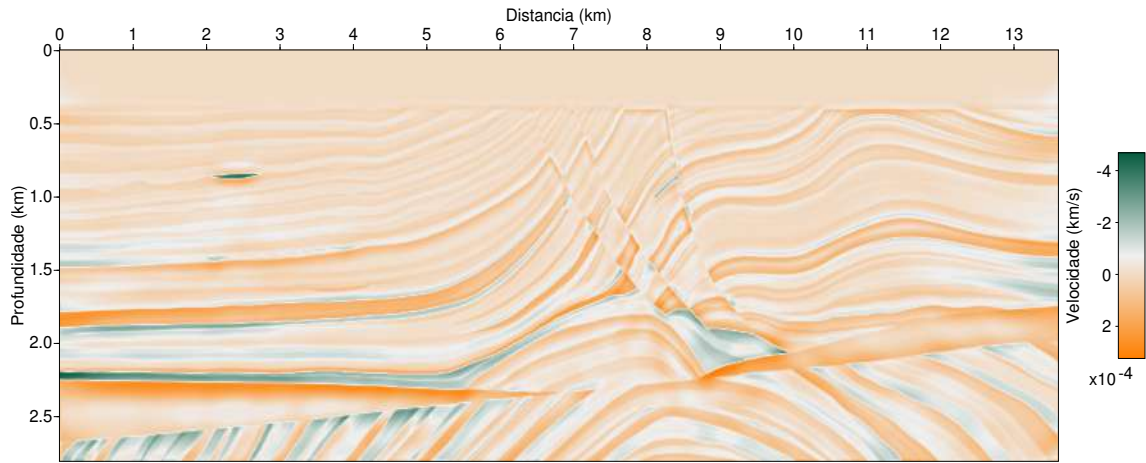


(b)

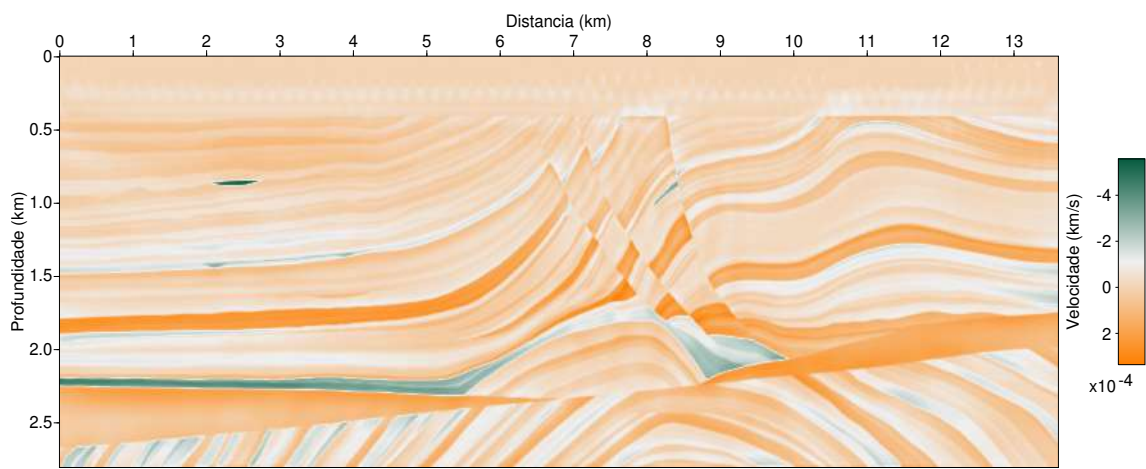


(c)

Figura 4.2.5: Em (a) o modelo inicial obtido a partir do modelo alvo de onda-P, suavizado 30 pontos nas direções vertical e horizontal. Resultados da inversão acústica: em (b) com dados de entrada da modelagem acústica e em (c) com dados de entrada da modelagem elástica.

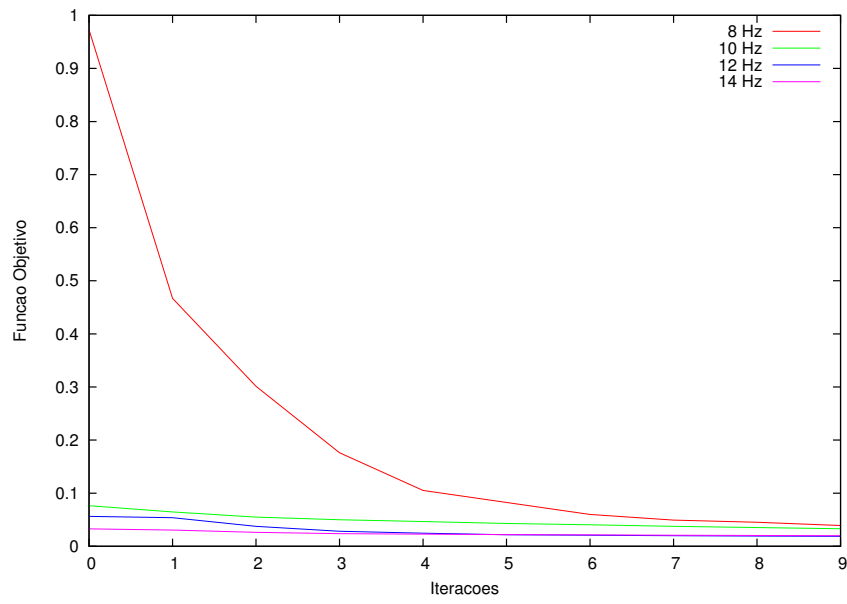


(a)

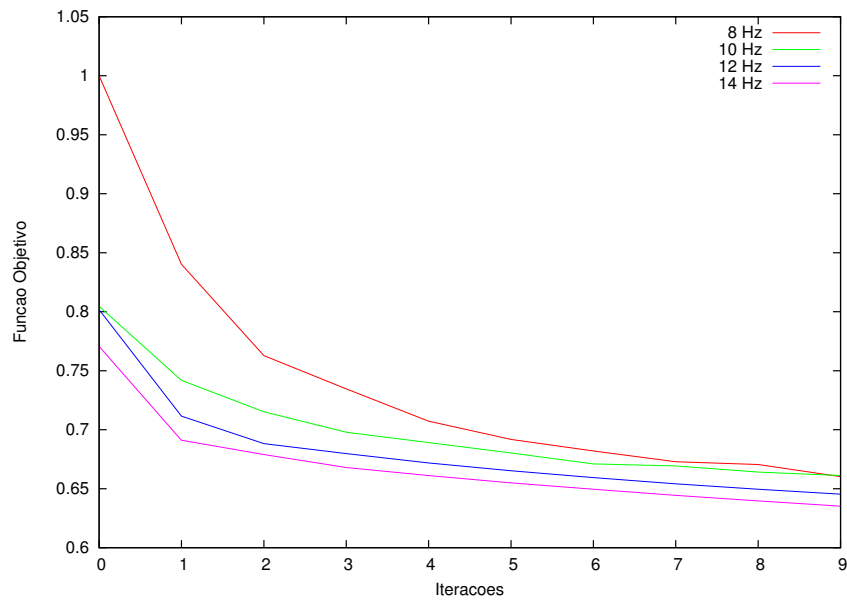


(b)

Figura 4.2.6: Erro relativo entre o modelo verdadeiro e os resultados da inversão. Em (a) é o erro relativo entre o modelo verdadeiro e o resultado da inversão com dado acústico e em (b) o erro relativo entre o modelo verdadeiro e o resultado da inversão com dado elástico.



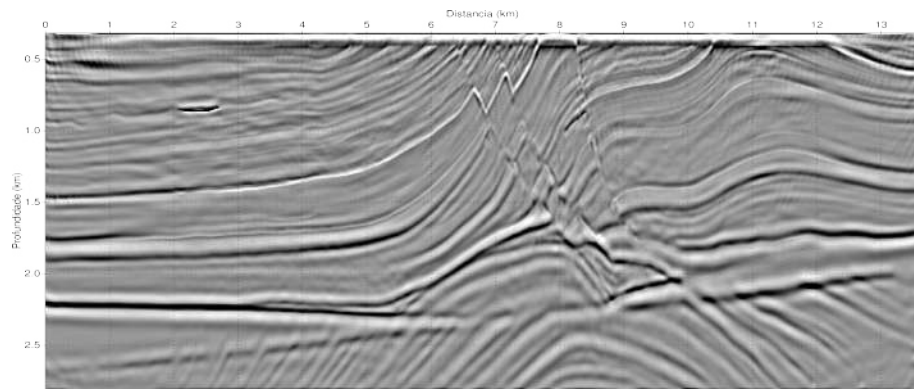
(a)



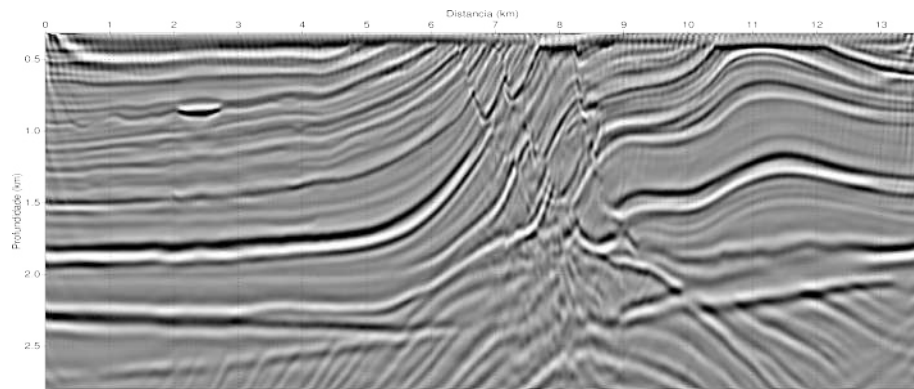
(b)

Figura 4.2.7: O comportamento da função objetivo normalizada com relação ao número de iterações. Em (a) a variação da função objetivo com dados de entrada acústico e, em (b) com os dados de entrada elástico.

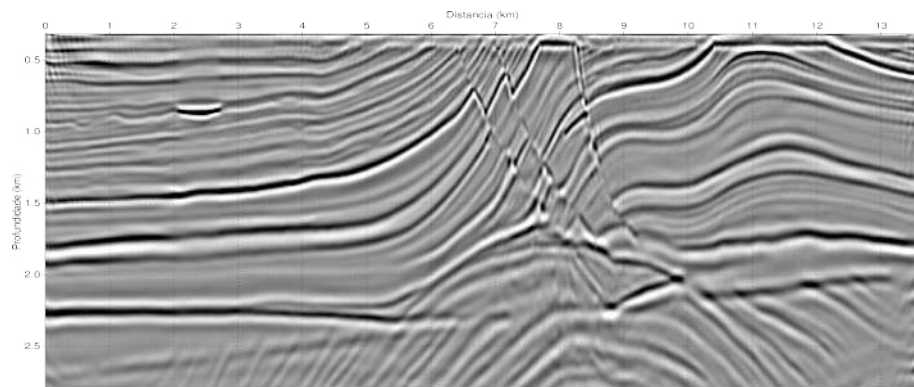




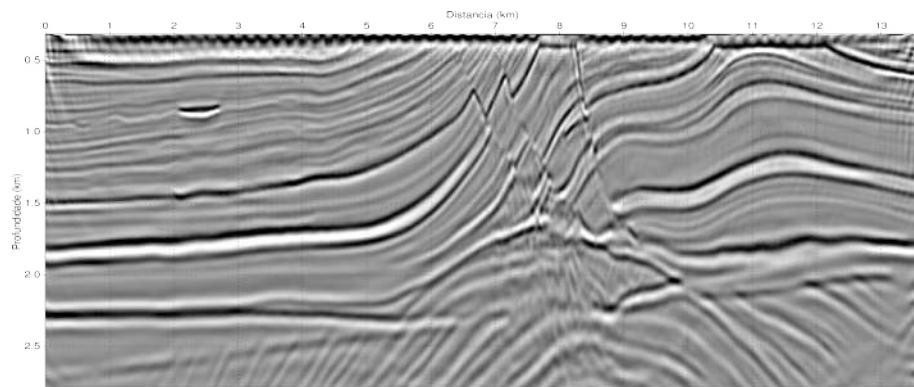
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.2.8: Resultados das migrações utilizando em: (a) modelo exato, (b) modelo inicial, (c) modelo resultante da inversão com dado acústico e (d) modelo resultante da inversão com dado elástico.

## 4.3 Conclusão

Comparando estes resultados, observa-se que a inversão utilizando dado acústico recupera de forma mais acurada o modelo verdadeiro de velocidade  $v_p$ , quando comparado ao caso em que se utiliza dado elástico.

Este resultado pode ser explicado pelo fato de a geração do dado sintético acústico ser idêntica ao problema direto do algoritmo do FWI acústico. Portanto, o problema inverso utilizando dado acústico teve menor não linearidade, comparado ao caso em que se utiliza dado elástico. No entanto, o dado elástico é mais próximo de um dado real. Isso sustenta a tese de se buscar melhores estratégias para a inversão de multiparâmetros. Este tema é examinado nos Capítulos 5 e 6.

# Capítulo 5

## Proposta de direção de atualização para correção de escala em inversão de multiparâmetros

### 5.1 Introdução

Na inversão de multiparâmetros para uma convergência apropriada do algoritmo é importante assegurar uma escala adequada para diferentes parâmetros que carregam unidades físicas distintas [65, 79]. Esta convergência é importante considerando o custo computacional relacionado as várias propagações e retropropagações do campo de onda requeridos pelo algoritmo FWI quando, no domínio do tempo, é proporcional ao número de fontes, ou quando no domínio da frequência, proporcional principalmente ao número discreto de frequências [79]. Sempre que algum condicionamento apropriado da direção de atualização dos parâmetros é implementado, a taxa de convergência pode ser acelerada. Portanto, utilizando o critério de minimização da função objetivo fixado, o número de iterações pode ser reduzido e o total do custo computacional diminui.

Na literatura, existem algumas propostas para assegurar que os parâmetros tenham escalas apropriadas para a inversão FWI. TARANTOLA [75] ressaltou que a escolha da parametrização pode tornar a inversão mais eficiente, mesmo que os parâmetros sejam matematicamente equivalentes. Métodos que são invariantes em escala, tal como o método de Newton, pode ser vantajoso para condicionar o problema inverso [22, 47]. Nessa linha, PRATT *et al.* [55] examinaram a importância dos efeitos da Hessiana e da Hessiana aproximada na inversão completa da onda. Eles demonstraram o aprimoramento na taxa de convergência, apesar do aumento do custo computacional para o cálculo da Hessiana. Uma aproximação mais econômica para a Hessiana aproximada (termo de Gauss-Newton) é a pseudo-Hessiana,

proposta por SHIN *et al.* [65], para aprimorar a preservação da amplitude para a migração pré-empilhamento reversa no tempo (RTM). Essa alternativa de escala foi aplicada ao FWI por JANG *et al.* [31]. ABUBAKAR *et al.* [1] utilizaram o método de Gauss-Newton calculando a matriz Jacobiana somente para cada laço de iteração interno, que diminui o uso de memória, mas aumenta o custo computacional. OPERTO *et al.* [49] mostraram que a Hessiana codifica a ambiguidade (*trade-off*) entre os parâmetros, mas estes efeitos dependem do ângulo relativo ao espalhamento do padrão de radiação, que dificulta sua aplicação direta. INNANEN [30] considera aproximações da Hessiana por análise de amplitude por afastamento (AVO) para reflexões pré-críticas. MÉTIVIER *et al.* [45] investigaram a eficiência do método de Newton truncado para diminuir efeitos de ambiguidade para simulação e reconstrução da velocidade compressional, densidade e fator de absorção. Um trabalho mais recente foi apresentado por WANG *et al.* [80], onde é proposto blocos da matriz pseudo-Hessiana como condicionamento para o gradiente-conjugado a fim de diminuir a interferência (*cross-talk*) entre os parâmetros elásticos.

Desta forma, este capítulo apresenta uma nova proposta de direção de atualização para o FWI acústico e de multiparâmetros, levando em consideração a transformação de propriedades da Hessiana e suas aproximações, uma vez que a Hessiana contém informações relacionadas à escala de parâmetros. Essa metodologia é avaliada numericamente para os casos acústico e elástico utilizando o modelo Marmousi-2 [41].

Partindo das formulações de FWI descritas no Capítulo 2, são demonstradas as equações das direções de atualização para o método convencional na Seção 5.2 e, para o método baseado na Hessiana aproximada, na Seção 5.3.

## 5.2 Direção de atualização baseada no gradiente

Uma mudança de base (ou conjunto de parâmetros) é frequentemente necessária a fim de se formular um problema inverso com um diferente conjunto de parâmetros, por exemplo, no caso elástico, transformação de velocidades (compressionais e de cisalhamento) e densidade  $(v_p, v_s, \rho)$  para os parâmetros de Lamé e densidade,  $(\lambda, \mu, \rho)$ , ou simplesmente expressar quantidades em diferentes unidades. Portanto, uma mudança de base da função objetivo  $E = E(\mathbf{p})$  em termos de  $\mathbf{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p_i = p_i(q_1, \dots, q_N)$  ( $i = 1, \dots, N$  são os índices do modelo), é  $\bar{E} = \bar{E}(\mathbf{q})$ . Consequentemente, o gradiente de  $\bar{E}(\mathbf{q})$  é obtido da seguinte forma:

$$(\nabla \bar{E}(\mathbf{q}))_i = \frac{\partial \bar{E}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial E}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_i} = (J^T \nabla E(\mathbf{p}))_i. \quad (5.2.1)$$

onde,

$$J_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \quad (5.2.2)$$

é um elemento da matriz Jacobiana. Em notação matricial, a Equação 5.2.1 é escrita por

$$\nabla \bar{E}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T \nabla E(\mathbf{p}). \quad (5.2.3)$$

Desta forma, utilizando a Equação 5.2.3, pode-se obter as direções de atualização para uma outra base de parâmetros. Aplicações desta transformação são mostradas nas Seções 5.4 e 5.5 para os casos acústico e elástico, respectivamente.

Além disso, é importante ressaltar uma questão bem conhecida relacionada à equação de atualização do gradiente (Equação 2.5.1)

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} - \alpha^{(k)} \nabla_p E^{(k)}, \quad (5.2.4)$$

cujas sua análise dimensional é dada por

$$[P] = [P] + [cte] \frac{[E]}{[P]}, \quad (5.2.5)$$

em que  $[P]$  é a dimensão de propriedades,  $[cte]$  é adimensional e  $[E]$  é a dimensão da amplitude do campo ao quadrado. Como pode ser observado ao lado direito da Equação 5.2.5, a atualização do parâmetro não possui as unidades adequadas do modelo. Devido a este fato, na próxima seção, é descrito uma atualização apropriada para corrigir as unidades físicas dos parâmetros.

### 5.3 Direção de atualização baseada na Hessiana aproximada e pseudo-Hessiana

Uma solução para se obter unidades físicas apropriadas e melhor escalar os parâmetros dos modelo é levando-se em consideração a contribuição da Hessiana. Esta seção descreve como obter uma direção de atualização do modelo seguindo procedimento análogo a seção anterior 5.2, no entanto utilizando o método Gauss-Newton

[47, 55] ao invés do método do gradiente. A fórmula de atualização do modelo de Gauss-Newton é dada por

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{H}_a^{-1} \nabla_p E^{(k)}, \quad (5.3.1)$$

onde  $\mathbf{H}_a$  é a Hessiana aproximada.

A mudança de base utilizando a Hessiana aproximada pode ser computada utilizando a expressão na forma das derivadas de Fréchet, como mostrada por PRATT *et al.* [55] e SHIN *et al.* [65]:

$$(\mathbf{H}_a)_{mn}(\mathbf{p}) = \sum_{s \in \text{src}} \sum_{r \in \text{rcv}} \int_T dt \frac{\partial u_{s,r}}{\partial p_m} \frac{\partial u_{s,r}}{\partial p_n}, \quad (5.3.2)$$

onde  $m, n = 1, \dots, N$  são os índices do modelo,  $\frac{\partial u_{s,r}}{\partial p_m}$  representa as derivadas de Fréchet relacionadas ao parâmetro  $p_m$  para o campo  $u$  da fonte  $s$  e receptor  $r$ , pertencente ao conjunto de fonte  $\text{src}$  e posições dos receptores  $\text{rcv}$ , respectivamente. Note que no conjunto de base  $\mathbf{q}$ , a derivada de Fréchet está relacionada com a derivada de Fréchet nos parâmetros de  $\mathbf{p}$  através do Jacobiano das mudanças de parametrizações  $(J_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial q_j})$ :

$$\frac{\partial u_{s,r}}{\partial q_i} = \sum_{m=1}^N \frac{\partial u_{s,r}}{\partial p_m} \frac{\partial p_m}{\partial q_i}. \quad (5.3.3)$$

Assim, a Hessiana aproximada, em termos dos parâmetros  $\mathbf{q}$  pode ser escrita como:

$$(\bar{\mathbf{H}}_a)_{ij}(\mathbf{q}) = \sum_{s \in \text{src}} \sum_{r \in \text{rcv}} \int_T dt \frac{\partial u_{s,r}}{\partial q_i} \frac{\partial u_{s,r}}{\partial q_j} \quad (5.3.4a)$$

$$= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \frac{\partial p_m}{\partial q_i} \underbrace{\sum_{s \in \text{src}} \sum_{r \in \text{rcv}} \int_T dt \left( \frac{\partial u_{s,r}}{\partial p_m} \frac{\partial u_{s,r}}{\partial p_n} \right)}_{(\mathbf{H}_a)_{mn}(\mathbf{p})} \frac{\partial p_n}{\partial q_j} \quad (5.3.4b)$$

$$= (\mathbf{J}^T \mathbf{H}_a(\mathbf{p}) \mathbf{J})_{ij}, \quad (5.3.4c)$$

portanto, em notação matricial,

$$\bar{\mathbf{H}}_a(\mathbf{q}) = \mathbf{J}^T \mathbf{H}_a(\mathbf{p}) \mathbf{J}. \quad (5.3.5)$$

Tendo a mudança de parametrização utilizando o método Gauss-Newton, tem-se que este é transformado como segue:

$$\Delta \mathbf{p}_{gn} \propto (\mathbf{H}_a(\mathbf{p}))^{-1} \nabla E(\mathbf{p}). \quad (5.3.6)$$

Então a equação de atualização para  $\mathbf{q}$  é dada por

$$\Delta \mathbf{q}_{gn} \propto (\bar{\mathbf{H}}_a(\mathbf{q}))^{-1} \nabla \bar{E}(\mathbf{q}) \quad (5.3.7a)$$

$$= (\mathbf{J}^T \mathbf{H}_a(\mathbf{p}) \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \nabla E(\mathbf{p}) \quad (5.3.7b)$$

$$= \mathbf{J}^{-1} \underbrace{(\mathbf{H}_a(\mathbf{p}))^{-1} \nabla E(\mathbf{p})}_{\Delta \mathbf{p}_{gn}} \quad (5.3.7c)$$

$$= \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{p}_{gn}. \quad (5.3.7d)$$

A Equação 5.3.7d é também válida para a diagonal da Hessiana aproximada e pseudo-Hessiana. Uma simplificação da Hessiana aproximada é a diagonal da pseudo-Hessiana [65], que é uma aproximação eficiente da Hessiana aproximada, onde o peso da computação das funções de Green do lado do receptor é omitido para cada posição de fonte [52]. A pseudo-Hessiana pode ser calculada por

$$\left( \tilde{\mathbf{H}} \right)_{mn}(\mathbf{p}) = \sum_{s \in src} \int_T dt \frac{\partial L(u_s)}{\partial p_m} \frac{\partial L(u_s)}{\partial p_n}, \quad (5.3.8)$$

onde  $L(u)$  é o operador de modelagem direta e  $u_s$  o campo de onda da fonte. Observa-se que esta possui a mesma transformação de propriedades sob reparametrização como a Hessiana aproximada. A transformação da Hessiana completa é analisada no Apêndice C.

Assim como ressaltado na seção anterior, uma observação importante é a análise dimensional da Equação 5.3.1:

$$[P] = [P] - \frac{[P][P][E]}{[E][P]}, \quad (5.3.9)$$

que fornece unidades corretas para a atualização de parâmetros. Assim, a expressão na Equação 5.2.3 deve ser comparada com a Equação 5.3.7d, fornecendo atualização de direções alternativas para a inversão FWI acústica e elástica, que são mostrados nas Seções 5.4 e 5.5. Com isso, este trabalho busca comparar resultados obtidos utilizando estes dois métodos na mudança de base de parâmetros.

Adicionalmente, uma outra forma de reforçar o benefício de utilizar a Hessiana aproximada e pseudo-Hessiana baseada no método de mudança de parâmetros, é demonstrando sua invariância sob pequenas atualizações. Dada uma atualização pequena para atualizar parâmetros em termos de  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ,

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta \mathbf{q}^{(k)}. \quad (5.3.10)$$

A atualização correspondente em  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  é dada por

$$p_i^{(k+1)} = p_i(\mathbf{q}^{(k+1)}) = p_i(\mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}^{(k)}) \quad (5.3.11a)$$

$$\approx p_i(\mathbf{q}^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial q_j} \Delta q_j^{(k)} \quad (5.3.11b)$$

$$= p_i^{(k)} + (J\Delta\mathbf{q}^{(k)})_i \quad (5.3.11c)$$

onde

$$\Delta\mathbf{p} \approx J\Delta\mathbf{q}. \quad (5.3.12)$$

Assumindo que as variáveis de transformação é uma transformação um para um e, portanto, possui inversa, pode-se escrever:

$$\Delta\mathbf{q} \approx J^{-1}\Delta\mathbf{p}. \quad (5.3.13)$$

Desta forma, pode-se observar que a atualização é compatível com a transformação variável dada pelo inverso da Jacobiana.

Resumindo, o método gradiente para as mudanças de base com o método Gauss-Newton:

1. método Gradiente:

$$\Delta\mathbf{p}_{gr} \propto \nabla E(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{q}_{gr} \propto J^T \Delta\mathbf{p}_{gr},$$

2. método Gauss-Newton:

$$\Delta\mathbf{p}_{gn} \propto (\mathbf{H}_a(\mathbf{p}))^{-1} \nabla E(\mathbf{p}) \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathbf{q}_{gn} \propto J^{-1} \Delta\mathbf{p}_{gn},$$

observa-se que as mudanças de variáveis no método de Gauss-Newton é compatível com a transformação de variável dada na Equação 5.3.13, mostrando que esta é invariante por mudança de reparametrização.

Levando em consideração a transformação de base de parâmetros, este trabalho propõe o seguinte fluxo:

1. Calcular o gradiente em uma parametrização que simplifique o cálculo da Hessiana aproximada (ou pseudo-Hessiana);
2. Escolher a parametrização com menor interferência considerando os modos de ondas registrados, que está relacionado ao padrão de radiação;



3. Transformar o gradiente com o inverso da Jacobiana como mostrado na Equação 5.3.7d.

Com relação a escolha da parametrização, uma análise do padrão de radiação do campo de onda espalhado por um ponto difrator de cada parâmetro deve ser considerado. Esta análise é específica para cada aproximação física usada (acústica ou elástica, isotrópica ou anisotrópica, etc.), o modo do campo de onda espalhado (P-P, P-S, etc.) e o modo do campo de onda registrado (ondas transmitidas ou refletidas). Para o caso elástico isotrópico por exemplo, TARANTOLA [75] argumenta que o padrão de radiação para energia refletida possui menor sobreposição considerando impedâncias compressionais e cisalhantes e densidade ( $I_p$ ,  $I_s$  e  $\rho$ ), e para a energia do modo de transmissão essa ambiguidade é reduzida considerando velocidades ( $v_p$  e  $v_s$ ) e densidade. Uma discussão da escolha de parametrização pela análise do padrão de radiação para meio acústico anisotrópico VTI (*vertical transverse isotropy*) é feito por OPERTO *et al.* [49] e para o caso para meio elástico anisotrópico ortorrômbico é apresentado por OH e ALKHALIFAH [48].

As Seções 5.4 e 5.5 são dedicadas à aplicação de FWI junto a esta proposta para os casos acústico e elástico, respectivamente.

## 5.4 Aplicação para o caso acústico

A proposta deste capítulo é comparar os resultados da inversão e mostrar diferentes propriedades de escala utilizando diferentes parametrizações para atualizar o modelo de velocidade compressional  $v_p$ . Além disso, é discutido que o condicionamento utilizando a diagonal da pseudo-Hessiana torna as atualizações independentes de parametrização (neste caso,  $v_p$  ou  $\sigma = 1/v_p^2$ ). Estas características são ilustradas numericamente utilizando o modelo Marmousi-2 na Seção 5.4.5.

### 5.4.1 Formulação

No caso acústico isotrópico 2D com densidade constante, o operador do problema direto é expresso pela equação acústica da onda:

$$L(v_p; u) = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla^2 u. \quad (5.4.1)$$

no qual  $u$  é o campo de pressão e  $v_p$  é o modelo de velocidade compressional.

Para mostrar que a escala do gradiente é altamente dependente da escolha do modelo de parametrização, apresentamos duas distintas parametrizações para o cálculo

de atualização do modelo de velocidade compressional  $v_p$  para o caso acústico:

1. Quadrado da vagarosidade da onda P ( $\sigma = \frac{1}{v_p^2}$ );
2. Velocidade da onda-P ( $v_P$ ).

### 5.4.2 Quadrado da vagarosidade da onda P

O quadrado da vagarosidade da onda P é definido por  $\sigma = \frac{1}{v_p^2}$ , então tem-se que o gradiente da função objetivo para este parâmetro é dado por

$$(\nabla_\sigma E)_i = \int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i, \quad (5.4.2)$$

onda  $u^\dagger$  é o campo adjunto (definido na Seção 2.4), a equação de atualização para a  $k$ -ésima iteração do método gradiente-descendente é dada por

$$\sigma_i^{(k+1)} = \sigma_i^{(k)} - \alpha^{(k)} (\nabla_\sigma E_k)_i. \quad (5.4.3)$$

Em termos de  $v_p$ , a equação de atualização 5.4.3 é

$$\frac{1}{\left(v_{p_i}^{(k+1)}\right)^2} = \frac{1}{\left(v_{p_i}^{(k)}\right)^2} - \alpha^{(k)} (\nabla_\sigma E^{(k)})_i, \quad (5.4.4)$$

que pode ser expressa como segue

$$v_{p_i}^{(k+1)} = \frac{v_{p_i}^{(k)}}{\sqrt{1 - \left(v_{p_i}^{(k)}\right)^2 \alpha^{(k)} (\nabla_\sigma E^{(k)})_i}}. \quad (5.4.5)$$

e assumindo que a equação de atualização no caso para pequenas atualizações (por exemplo 5% de atualização), tem-se que  $\alpha_k \nabla_\sigma E_k \sim 0,05 * (1/v_{p_k}^2)$ , portanto é possível aproximar a Equação 5.4.5 na expansão de Taylor até a primeira ordem

$$\begin{aligned} v_{p_i}^{(k+1)} &\approx v_{p_i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \frac{\left(v_{p_i}^{(k)}\right)^3}{2} \int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i \\ v_p^{(k+1)} &\approx v_p^{(k)} + \alpha^{(k)} \frac{\left(v_{p_i}^{(k)}\right)^3}{2} (\nabla_\sigma E^{(k)})_i. \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

### 5.4.3 Velocidade da onda P

Utilizando a velocidade  $v_p$  como o parâmetro, tem-se

$$(\nabla_{v_p} E)_i = -\frac{2}{\left(v_{p_i}^{(k)}\right)^3} \int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i. \quad (5.4.7)$$

Assim, a equação de atualização para o parâmetro velocidade é

$$v_{p_i}^{(k+1)} = v_{p_i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \frac{2}{\left(v_{p_i}^{(k)}\right)^3} \int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i. \quad (5.4.8)$$

Desta forma, fica claro que os gradientes em termo da vagarosidade ao quadrado (Equação 5.4.5) e a velocidade (Equação 5.4.8) são distintos. Conclui-se que isso certamente implica em diferentes propriedades de convergência para cada parametrização.

### 5.4.4 Precondicionamento da diagonal da pseudo-Hessiana

Conforme discutido da Seção 5.3, o uso da pseudo-Hessiana como preconditionamento deve tornar as atualizações independentes da escolha da parametrização. Portanto, para a parametrização do problema inverso com  $v_p$  e  $\sigma$ , as derivadas necessárias para avaliar a diagonal da pseudo-Hessiana na Equação 5.3.8, que são dadas por

$$\frac{\partial L(u)}{\partial \sigma} = \ddot{u}, \quad (5.4.9)$$

$$\frac{\partial L(u)}{\partial v_p} = -\frac{2}{v_p^3} \ddot{u}. \quad (5.4.10)$$

Desta forma, a direção de atualização para  $\sigma$  é

$$\left(\tilde{H}(v_p)^{-1} \nabla_{v_p} E\right)_i = -\frac{v_{p_i}^3}{2} \frac{\int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i}{\int_T dt \ddot{u}_i \ddot{u}_i}, \quad (5.4.11)$$

e para  $v_p$

$$\left(\tilde{H}(v_p)^{-1} \nabla_{v_p} E\right)_i = \frac{-\frac{2}{v_{p_i}^3} \int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i}{\left(-\frac{2}{v_{p_i}^3}\right)^2 \int_T dt \ddot{u}_i \ddot{u}_i} = -\frac{v_{p_i}^3}{2} \frac{\int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i}{\int_T dt \ddot{u}_i \ddot{u}_i}. \quad (5.4.12)$$

Assim, para pequenas atualizações, as expressões (5.4.12) e (5.4.11) fornecem a seguinte equação de atualização em termos da velocidade compressional:

$$v_{p_i}^{(k+1)} = v_{p_i}^{(k)} \left( 1 - \left( v_p^{(k)} \right)^2 \alpha^{(k)} \tilde{H}(\sigma)^{-1} \nabla_\sigma E^{(k)} \right)_i^{-\frac{1}{2}} \quad (5.4.13)$$

$$\approx v_{p_i}^{(k)} + \alpha^{(k)} \frac{v_{p_i}^3 \int_T dt u_i^\dagger \ddot{u}_i}{2 \int_T dt \ddot{u}_i \ddot{u}_i} \quad (5.4.14)$$

$$= v_{p_i}^{(k)} - \alpha^{(k)} \left( \tilde{H}(v_p)^{-1} \nabla_{v_p} E^{(k)} \right)_i. \quad (5.4.15)$$

A importância deste resultado é que para pequenas atualizações, independente da parametrização  $v_p$  ou  $\sigma$ , o gradiente escalado pela diagonal da pseudo-Hessiana fornece o mesmo modelo de atualização.

### 5.4.5 Aplicação numérica: modelo Marmousi-2 acústico

Estas aplicações numéricas no caso acústico tiveram como finalidade fazer uma comparação entre as parametrizações baseadas no quadrado da vagarosidade, velocidade compressional e de condicionamento da diagonal da pseudo-Hessiana, descritas respectivamente nas Seções 5.4.2, 5.4.3 e 5.4.4. Foi utilizado o modelo Marmousi-2 [42], ilustrado na Figura 5.4.1a. Esse modelo representa a velocidade compressional para um meio isotrópico numa geologia complexa. A modelagem foi feita num dado sintético sem ruído, em geometria fixa de aquisição, com espaçamento da malha de 10 m, amostragem 1 ms e duração do registro de 3000 ms. Foram modelados 68 tiros com 200 m de intervalo e 1360 receptores ao longo da superfície do modelo com distância entre os mesmos de 10 m. A modelagem direta foi implementada no domínio do tempo com estêncil otimizado de oitava ordem [26] e bordas absorcivas foram implementadas por uma combinação de estratégias apresentadas por REYNOLDS [61] e CERJAN *et al.* [14].

O processo de inversão foi feito no domínio do tempo. O modelo inicial utilizado como entrada é a versão suavizada do modelo inicial (Figura 5.4.1b), no qual é aplicado um filtro Gaussiano com raio de 300 m por 300 m. De modo a evitar salto de ciclo (*cycle-skipping*) [12], a metodologia multi-escala é considerada, numa banda de frequência de 8 Hz a 14 Hz, com 2 Hz de intervalo e 10 iterações para cada.

A fim de avaliar as propriedades de convergência das direções de atualização, três diferentes esquemas de atualização foram feitos:

1. baseado na parametrização de  $v_p$ , com a equação de atualização da Equação 5.4.8;
2. baseado na parametrização de  $\sigma$ , com a equação de atualização da Equação

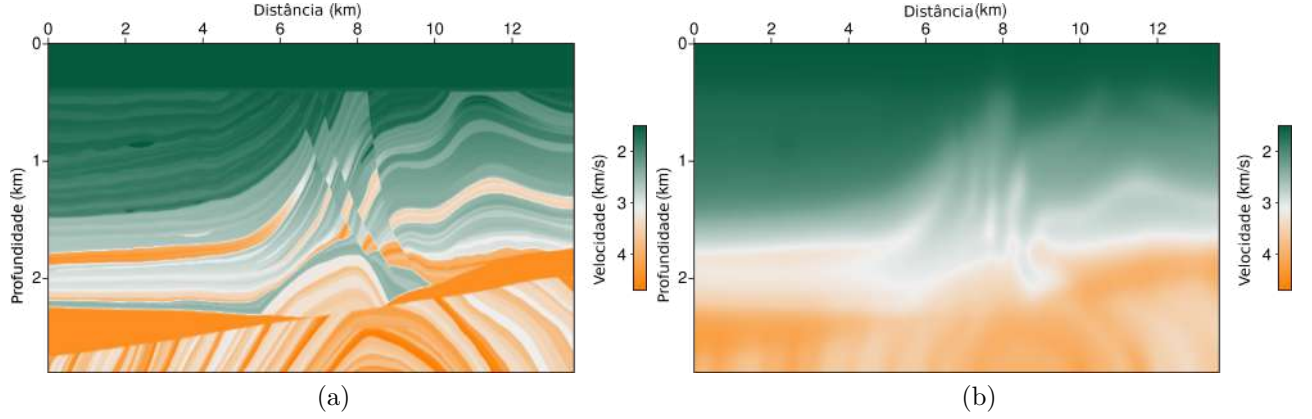


Figura 5.4.1: O modelo de velocidade Marmousi-2 é dado em (a). O modelo inicial para a inversão é ilustrado em (b).

5.4.6;

3. baseado na correção da diagonal da pseudo-Hessiana, com direção de atualização da Equação 5.4.15.

As Figuras 5.4.2 e 5.4.3 apresentam os resultados finais de FWI para diferentes parametrizações. Na Figura 5.4.4 há uma comparação dos perfis de velocidade obtidos de cada um dos resultados na posição  $x = 8.5$  km (na direção do reservatório do modelo) sobreposto com os modelos inicial e verdadeiro. A partir destes resultados conclui-se que:

1. Conforme observado nas Figuras 5.4.2a e 5.4.2b há uma grande diferença nas atualizações na região abaixo de 1 km entre as parametrizações em  $v_p$  e  $\sigma$ . A parametrização em  $\sigma$  atualizou melhor o modelo como um todo, enquanto que no resultado da parametrização em  $v_p$ , a mesma região permaneceu próximo ao modelo inicial.
2. Com a parametrização em  $\sigma$  e com a correção da diagonal da pseudo-Hessiana  $\tilde{\mathbf{H}}$  o modelo de velocidade é muito bem recuperado, sendo ambos muito similares.
3. As conclusões acima podem ser confirmadas pela análise dos perfis de velocidade, expostos na Figura 5.4.4. Nas regiões mais rasas nos dois métodos, os resultados das inversões são similares. Nas regiões mais profundas é reafirmado que a parametrização em  $v_p$  possui menor aproximação ao modelo verdadeiro e mais próximo ao modelo inicial. Por outro lado, a parametrização em  $\sigma$  e  $\tilde{\mathbf{H}}$  são muito similares entre si e são mais próximas do modelo verdadeiro, apesar dos números limitados de iterações e banda de frequência utilizados para a inversão.

Estes resultados numéricos colocam em evidência a importância da escolha da parametrização para uma atualização adequada independente de escala. Fica claro que a parametrização com  $\sigma$  permite melhores resultados de inversão e convergência mais rápida do que com parametrização em  $v_p$ . Isso pode ser melhor entendido observando que a única diferença entre as expressões (5.4.6) e (5.4.14) é o termo autocorrelação do campo de onda direto ( $\int_T dt \ddot{u}\ddot{u}$ ). Em outras palavras, a parametrização em  $\sigma$  possui a mesma propriedade de escala do parâmetro como a atualização da pseudo-Hessiana, embora este não tenha o fator de correção de iluminação do campo de onda.

De fato, os resultados muito próximos das parametrizações com  $\sigma$  e a correção pela pseudo-Hessiana podem ser explicados analisando a imagem para a última iteração da autocorrelação do campo da fonte na Figura 5.4.3b. Uma vez que a geometria de aquisição escolhida permite uma iluminação completa de todo o modelo, o termo ( $\int_T dt \ddot{u}\ddot{u}$ ) tem influência somente nas partes mais próximas a borda do modelo. Essa pequena diferença pode ser vista nas regiões mais profundas do perfil de velocidade (próximo de 2.7 km). Para uma geometria de aquisição incompleta (não considerada neste trabalho), o fator de iluminação deve ter grande importância. Essa questão foi originalmente discutida no artigo de SHIN *et al.* [65].

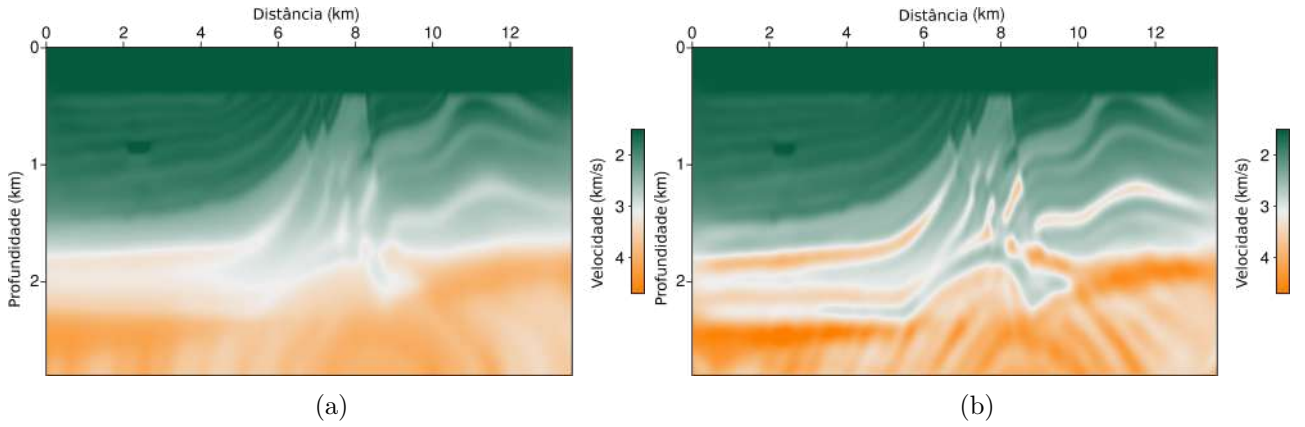


Figura 5.4.2: (a) É o resultado da inversão utilizando a parametrização em  $v_p$ . Figura (b), é o resultado para a inversão usando a parametrização em  $\sigma$ .

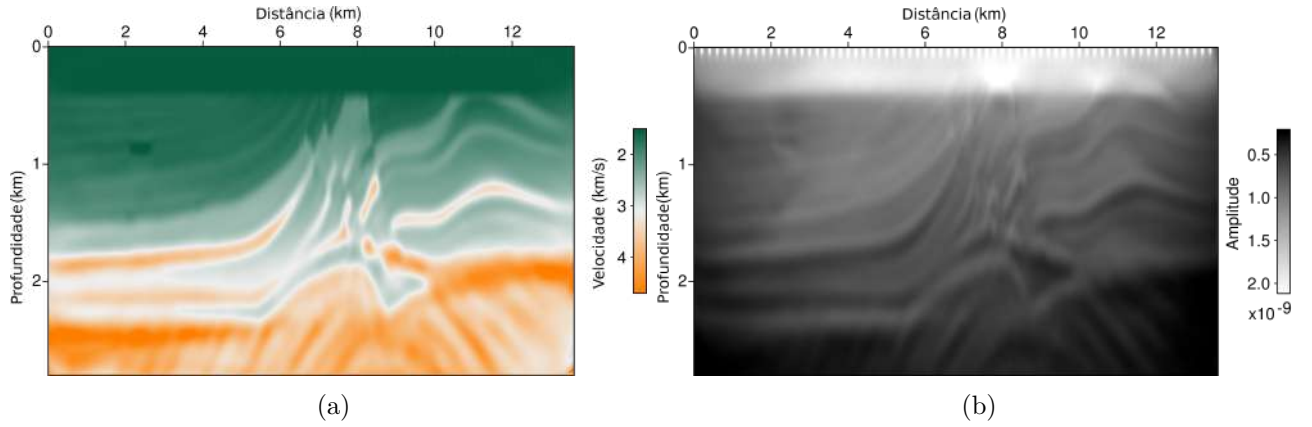


Figura 5.4.3: Em (a) o resultado usando o condicionamento com pseudo-Hessiana. Figura (b), é a autocorrelação do campo de onda direto ( $\int_T dt \ddot{u}\ddot{u}$ ) para a última iteração, mostrada na Equação 5.4.11.

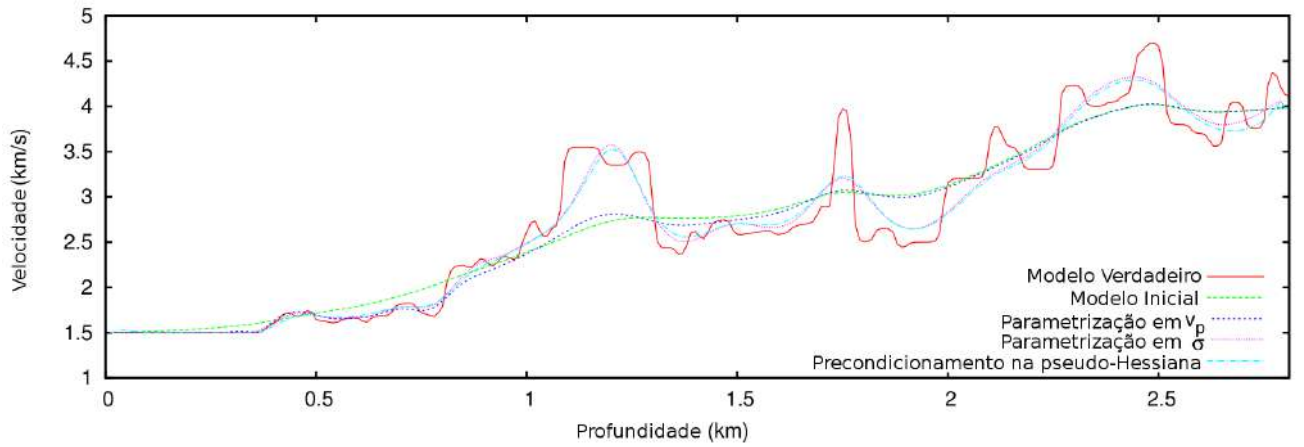


Figura 5.4.4: O perfil de velocidade para os modelos estimados na posição  $x=8.5$  km.

## 5.5 Aplicação para o caso elástico

Esta seção descreve a formulação elástica 2D isotrópica para duas abordagens, sendo uma a direção de atualização convencional, que é obtida pela transformação de parâmetros baseada no gradiente, e a proposta nesta tese, feita pela transformação por pré condicionamento do inverso da Hessiana aproximada. A formulação das direções de atualização foram baseadas na referência [77], apresentada na Seção 5.5.1. A fim de reduzir o custo computacional, restringe-se a formulação para o caso 2D, no entanto o cálculo para as equações do caso 3D estão ilustradas no Apêndice D. Na Seção 5.5.2 calcula-se a expressão convencional para a parametrização do gradiente para velocidades compressional e cisalhante ( $v_p$  e  $v_s$  respectivamente) e densidade  $\rho$ , a fim de comparar com as expressões propostas para as respectivas direções de atualizações de modelo. Para avaliar ambos métodos para atualização de parâmetros (convencional e o proposto nesta tese), aplicações numéricas são apresentadas nas Seções 5.5.5 e 5.5.6. Na primeira, procura-se avaliar cada parâmetro elástico separadamente através da comparação dos gradientes pelos métodos de atualização convencional e proposto em um modelo linear na profundidade com perturbações gaussianas. Na segunda aplicação, compara-se os resultados da inversão do método proposto com o método convencional. Para o método proposto é utilizado como o método de otimização apenas o gradiente-descendente (SD) e para o método convencional, é utilizado adicionalmente o método de otimização l-BFGS, que recursivamente estima o produto do inverso da Hessiana com o gradiente [47]. A inversão é realizada simultaneamente para os parâmetros das velocidades e densidade com o modelo Marmousi-2 [42].

### 5.5.1 Formulação

A equação da onda elástica com a formulação velocidade-tensão [27, 78, 82] pode ser escrita da seguinte forma:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \mathcal{E}^T \vec{\tau} = 0, \quad (5.5.1a)$$

$$\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} - C \mathcal{E} \vec{v} = \vec{f}, \quad (5.5.1b)$$

onde  $\rho$  é a densidade e  $\vec{f}$  uma fonte explosiva. Restringindo o sistema de equações (5.5.1a)-(5.5.1b) para o caso 2D e modos P-SV, tem-se que o vetor velocidade de partícula é representado por

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix}, \quad (5.5.2)$$



a componente do vetor tensão é dada por

$$\vec{\tau} = (\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz})^T, \quad (5.5.3)$$

e o operador de derivadas

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & \\ & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial x \end{pmatrix}. \quad (5.5.4)$$

Considerando um meio 2D isotrópico, o tensor de rigidez é representado como

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad (5.5.5)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são os parâmetros de Lamé.

O operador da equação da onda para o sistema de equações (5.5.1a-5.5.1b) é escrito como

$$L(\rho, S, \vec{u}) = \begin{pmatrix} \rho I & \\ & S \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \begin{pmatrix} & \mathcal{E}^T \\ \mathcal{E} & \end{pmatrix} \vec{u}, \quad (5.5.6)$$

onde o campo de onda é formado por  $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix}$  e introduzimos o tensor de conformidade  $S$ , que é o inverso do tensor de rigidez com as mesmas propriedades de simetria e  $C_{ijkl}S_{klmn} = I_{ijmn} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$  [43].  $I$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .

A equação de estado correspondente (Equação 2.4.2) para a equação da onda é

$$g(\mathbf{p} = \{\rho, S\}, \vec{u}) = \begin{pmatrix} \rho I & \\ & S \end{pmatrix} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \begin{pmatrix} & \mathcal{E}^T \\ \mathcal{E} & \end{pmatrix} \vec{u} - \begin{pmatrix} 0 \\ Sf \end{pmatrix} = 0, \quad (5.5.7)$$

em que a equação de estado adjunta (Equação 2.4.3) é solucionada pelo campo adjunto  $\vec{\varphi}^\dagger = \begin{pmatrix} \vec{v}^\dagger \\ \vec{\tau}^\dagger \end{pmatrix}$  que satisfaz:

$$\left[ \begin{pmatrix} \rho I & \\ & S \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(-t)} - \begin{pmatrix} & \mathcal{E}^T \\ \mathcal{E} & \end{pmatrix} \right] \vec{\varphi}^\dagger = -R^\dagger (R\vec{u} - d), \quad (5.5.8)$$

$$\vec{\varphi}^\dagger(\mathbf{x}, t = T) = 0. \quad (5.5.9)$$

O cálculo do gradiente é dado por

$$\left\langle \varphi^\dagger, \left( \frac{\partial g}{\partial p}(p, \vec{u}) \right) \delta p \right\rangle = \int_0^T dt \int_\Omega d\mathbf{x} \varphi^\dagger \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial p} \begin{pmatrix} \rho I & \\ & S \end{pmatrix} \delta p \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial p} \begin{pmatrix} 0 \\ S f \end{pmatrix} \delta p \right] \quad (5.5.10a)$$

$$= \int_\Omega d\mathbf{x} \left( \int_0^T dt \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \cdot \vec{v}^\dagger \right) \delta \rho \quad (5.5.10b)$$

$$+ \sum_{i=1}^6 \sum_{j=i}^6 \int_\Omega d\mathbf{x} \left( \int_0^T dt \left( \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} - \vec{f} \right) \cdot \vec{\tau}^\dagger \right) \delta S \quad (5.5.10c)$$

$$= \left\langle \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)^\dagger \varphi^\dagger, \delta p \right\rangle_\Omega. \quad (5.5.10d)$$

Portanto, o gradiente elástico para os parâmetros  $\mathbf{p} = (\rho, S)$ , em acordo com a Equação 2.4.4, é

$$\nabla_p E = \begin{pmatrix} \nabla_\rho E \\ \nabla_S E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^T dt \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \cdot \vec{v}^\dagger \\ \int_0^T dt \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} - \vec{f} \right) \cdot \tau_{ij}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (5.5.11)$$

Pode-se observar que o termo fonte relacionado a  $\vec{f}$  na Equação 5.5.11 é nulo nas posições fora da fonte e será negligenciado daqui em diante.

## 5.5.2 Gradientes elásticos isotrópicos 2D

A expressão geral para o gradiente elástico é obtida na expressão 5.5.11. Uma vez que restringe-se o cálculo no caso 2D isotrópico, o tensor de conformidade é dado por

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4(\lambda+\mu)} + \frac{1}{4\mu} & \frac{1}{4(\lambda+\mu)} - \frac{1}{4\mu} & \\ \frac{1}{4(\lambda+\mu)} - \frac{1}{4\mu} & \frac{1}{4(\lambda+\mu)} + \frac{1}{4\mu} & \\ & & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}. \quad (5.5.12)$$

Com o uso de parâmetros auxiliares,  $a = \frac{1}{\lambda+\mu}$  e  $b = \frac{1}{\mu}$  o tensor de conformidade pode ser escrito da seguinte forma

$$S_{ij}(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{a}{4} + \frac{b}{4} & \frac{a}{4} - \frac{b}{4} & \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{4} & \frac{a}{4} + \frac{b}{4} & \\ & & b \end{pmatrix}. \quad (5.5.13)$$

Portanto, o gradiente para o parâmetro  $a = \frac{1}{\lambda + \mu}$  é

$$\nabla_a E = \int_T dt \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \right) (\tau_{xx}^\dagger + \tau_{zz}^\dagger) \quad (5.5.14)$$

e o gradiente para o parâmetro  $b = \frac{1}{\mu}$  é

$$\nabla_b E = \int_T dt \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \right) (\tau_{xx}^\dagger - \tau_{zz}^\dagger) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} \tau_{xz}^\dagger \right]. \quad (5.5.15)$$

### 5.5.3 Metodologia convencional para obtenção de direções de atualização: transformação de base de parâmetros baseada no gradiente

Considerando uma análise de ambiguidade (*trade-off*) através do padrão de radiação [75], tem-se que a parametrização  $(\lambda, \mu, \rho)$  possui interferência (*cross-talk*) considerável entre os parâmetros para a reflexão e componentes de transmissão do campo de onda espalhado. Por tal razão, o uso da parametrização  $(v_p, v_s, \rho)$  é preferível, especialmente se a energia transmitida é registrada. As direções convencionais de atualização para o FWI elástico são obtidas depois de uma reparametrização, conforme a Equação 5.2.1. A relação para a parametrização  $v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ,  $v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  e  $\rho$ , utilizando os parâmetros auxiliares  $a$  e  $b$  são

$$a(v_p, v_s, \rho) = \frac{1}{(v_p^2 - v_s^2)\rho}, \quad (5.5.16)$$

$$b(v_p, v_s, \rho) = \frac{1}{v_s^2 \rho}. \quad (5.5.17)$$

A matriz Jacobiana de transformação de variáveis é dada por

$$J_{\{a,b,\rho\} \rightarrow \{v_p,v_s,\rho\}} = \frac{\partial(a,b,\rho)}{\partial(v_p,v_s,\rho)}, \quad (5.5.18)$$

e  $J^T$  é obtido

$$J^T = \begin{pmatrix} -\frac{2v_p}{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho} & 0 & 0 \\ \frac{2v_s}{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho} & -\frac{2}{v_s^3 \rho} & 0 \\ -\frac{1}{(v_p^2 - v_s^2)\rho^2} & -\frac{1}{v_s^2 \rho^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.5.19)$$

Portanto, os gradientes em termo de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  com o Jacobiano transposto é dado por

$$\nabla_{v_p} E = -\frac{2v_p}{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho} \nabla_a E \quad (5.5.20a)$$

$$\nabla_{v_s} E = \frac{2v_s}{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho} \nabla_a E - \frac{2}{v_s^3 \rho} \nabla_b E, \quad (5.5.20b)$$

$$\nabla_{\rho'} E = -\frac{1}{(v_p^2 - v_s^2) \rho^2} \nabla_a E - \frac{1}{v_s^2 \rho^2} \nabla_b E + \nabla_{\rho} E. \quad (5.5.20c)$$

Como pode ser visto em [21, 36, 77] as Equações 5.5.20a, 5.5.20b e 5.5.20c são as direções de atualização elástica convencionais. Além disso, pode-se observar da Equação 5.5.20c, que a atualização do parâmetro de densidade  $\rho$  é muito dependente da parametrização escolhida.

#### 5.5.4 Metodologia proposta para obtenção de direções de atualização: transformação de base de parâmetros baseada no inverso da Hessiana aproximada

Para as direções de atualização propostas, considera-se a Hessiana aproximada que nos fornece o inverso do Jacobiano para mudança de coordenadas (conforme Equação 5.3.7d)

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho}{2v_p} & -\frac{v_s^4 \rho}{2v_p} & -\frac{v_p}{2\rho} \\ 0 & -\frac{v_s^3 \rho}{2} & -\frac{v_s}{2\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.5.21)$$

Portanto, os gradientes em termo de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  são

$$\Delta v_p \propto -\frac{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho}{2v_p} \frac{\nabla_a E}{\tilde{H}(a, a)} - \frac{v_s^4 \rho}{2v_p} \frac{\nabla_b E}{\tilde{H}(b, b)} - \frac{v_p}{2\rho} \frac{\nabla_{\rho} E}{\tilde{H}(\rho, \rho)}, \quad (5.5.22a)$$

$$\Delta v_s \propto -\frac{v_s^3 \rho}{2} \frac{\nabla_b E}{\tilde{H}(b, b)} - \frac{v_s}{2\rho} \frac{\nabla_{\rho} E}{\tilde{H}(\rho, \rho)}, \quad (5.5.22b)$$

$$\Delta \rho \propto \frac{\nabla_{\rho} E}{\tilde{H}(\rho, \rho)}. \quad (5.5.22c)$$

Aqui as divisões pela diagonal da pseudo-Hessiana são operações ponto a ponto. A aproximação para a diagonal da pseudo-Hessiana (Equação 5.3.8) para os parâmetros

$(a, b, \rho)$  são dados por

$$\tilde{H}(a, a) = \int_T dt \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \right)^2 \quad (5.5.23a)$$

$$\tilde{H}(b, b) = \int_T dt \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (5.5.23b)$$

$$\tilde{H}(\rho, \rho) = \int_T dt \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (5.5.23c)$$

Agora, comparando a direção de atualização de  $\rho$  do caso convencional (Equação 5.5.20c) com a direção proposta (Equação 5.5.22c) pode-se observar que a última equação possui invariância da direção de atualização  $\rho$ .

De fato, pode-se observar que para as direções elásticas de atualização propostas nas Equações 5.5.22a, 5.5.22b e 5.5.22c as unidades estão apropriadas aos parâmetros. Por exemplo, para o primeiro termo do lado direito da Equação 5.5.22a, a análise dimensional é dada por

$$\left[ \frac{(v_p^2 - v_s^2)^2 \rho}{2v_p} \frac{\nabla_a E}{\tilde{H}(a, a)} \right] = [v]^3 [\rho] [a] = [v]. \quad (5.5.24)$$

A mesma consistência, pode ser observada para os outros parâmetros (Equações 5.5.22a-5.5.22b).

### 5.5.5 Aplicação numérica: Modelo com perturbações

A proposta da seguinte aplicação numérica é avaliar cada parâmetro elástico individualmente, utilizando um modelo simples de perturbação, através da direções de atualização dos dois métodos, ou seja, convencional e proposto. As perturbações do modelo são pequenas a fim de reduzir a não linearidade do problema. A motivação desta aplicação é verificar com clareza as diferenças entre ambos métodos.

A aplicação sintética é feita no domínio do tempo com uma frequência de corte de 5 Hz, com bordas absorcivas em volta do modelo (ou seja, não há eventos de múltiplas de superfície considerado), o dado é registrado por componente de pressão (hifrofone). A aquisição é feita com 41 tiros, com intervalo de distância de 125 m, 200 receptores com geometria fixa de 25 m, e 6 segundos de registro.

Os modelos possuem fundo linear e pequena perturbação. Para a velocidade compressional o fundo linear possui variação gradual de 1500 a 3000 m/s, 800 a 1700 para a velocidade cisalhante e 1900 a 2400 kg/m<sup>3</sup> para a densidade. As pequenas perturbações são  $\Delta v_p = \Delta v_s = 100$  m/s e  $\Delta \rho = 100$  kg/m<sup>3</sup> para cada. As Figuras

5.5.1a, 5.5.2a e 5.5.3a mostram os modelos com perturbação, e as Figuras 5.5.1b, 5.5.2b e 5.5.3b os modelos iniciais, que consistem apenas de fundo linear (em  $z$ ).

Os resultados das direções de atualização elásticos convencionais são mostrados nas Figuras 5.5.1c, 5.5.2c e 5.5.3c e as direções de atualização elásticos propostos são mostrados nas Figuras 5.5.1d, 5.5.2d e 5.5.3d.

Fazendo uma comparação entre as Figuras 5.5.1c e 5.5.1d, pode-se observar que a primeira é principalmente atualizada na região rasa até 1 km, enquanto que a segunda é atualizada no modelo inteiro. A mesma conclusão é feita para  $v_s$ , como pode ser visto nas Figuras 5.5.2c e 5.5.2d. No caso da densidade (5.5.3c e 5.5.3d), ambos métodos fornecem resultados muito similares, que é devido aos dois primeiros termos da direção de atualização convencional (Equação 5.5.20c) serem muito pequenos, portanto o terceiro termo, que possui maiores valores, fazem o resultado similar com a direção de atualização proposta (Equação 5.5.22c).

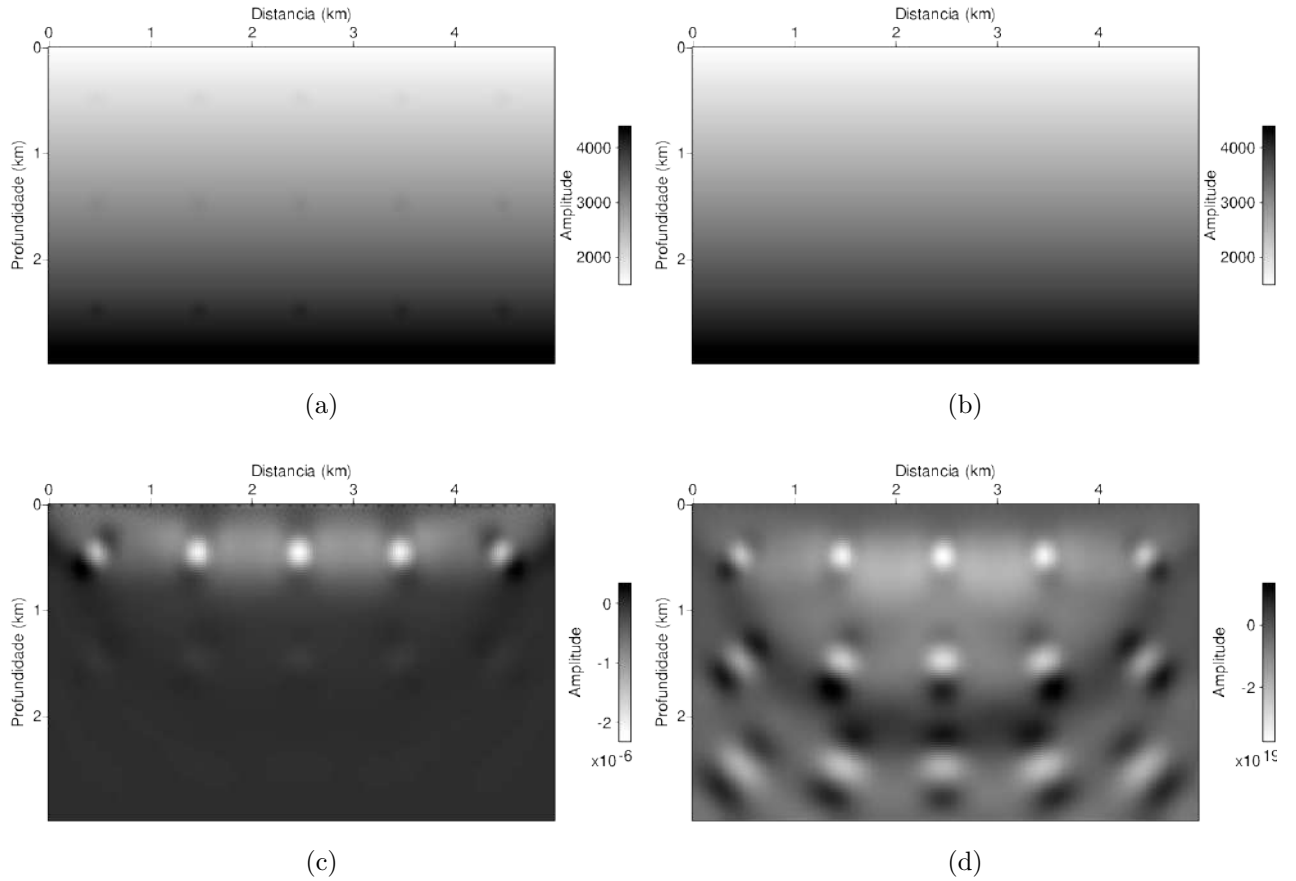


Figura 5.5.1: Parâmetro velocidade compressional  $v_p$ : (a) modelo verdadeiro com perturbação, (b) modelo de fundo (inicial), (c) resultado da direção de atualização convencional e (d) resultado da direção de atualização pré condicionada pelas transformações do inverso da pseudo-Hessiana (ou Hessiana aproximada).

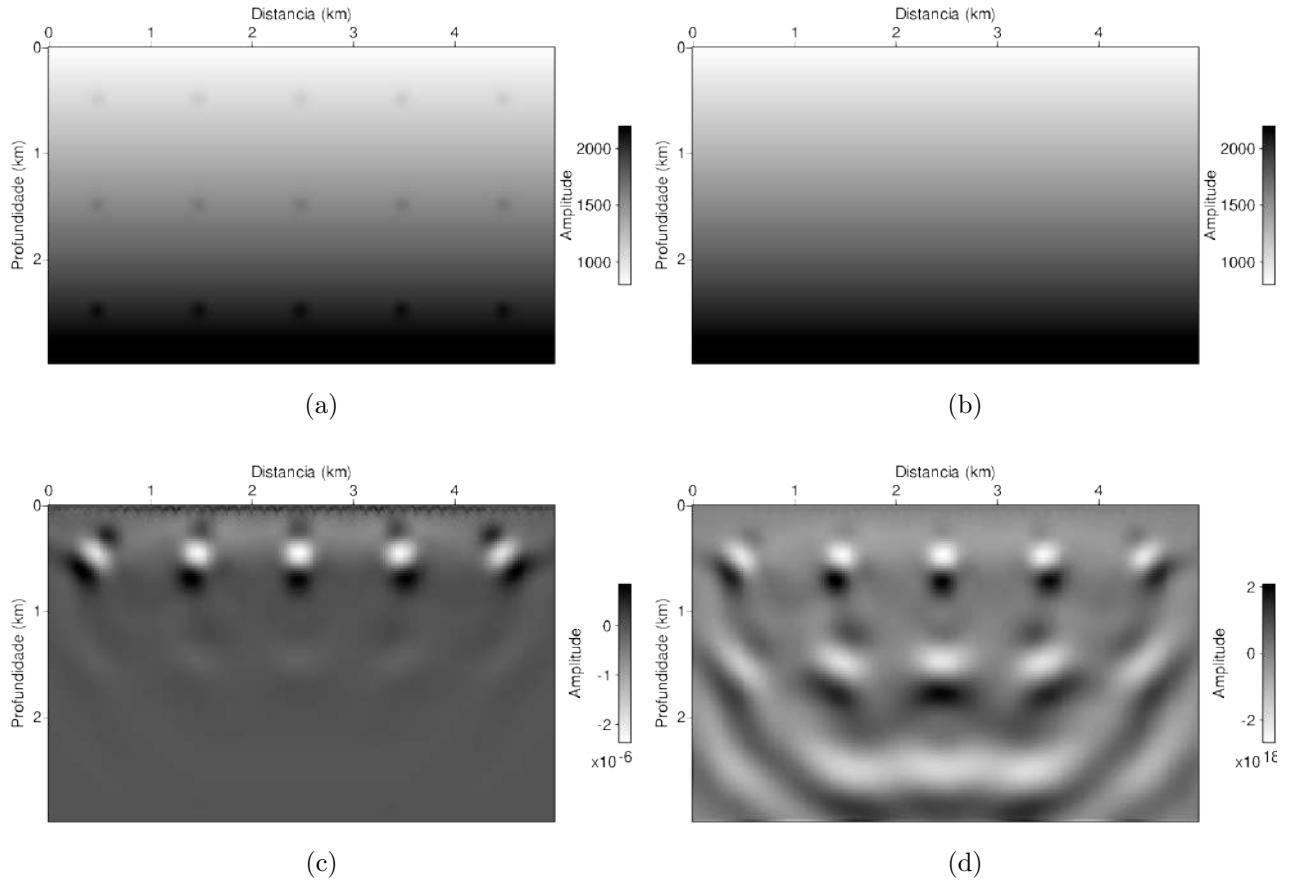


Figura 5.5.2: Parâmetro velocidade cisalhante  $v_s$ : (a) modelo verdadeiro com perturbação, (b) modelo de fundo (inicial), (c) resultado da direção de atualização convencional e (d) resultado da direção de atualização pré condicionada pelas transformações do inverso da pseudo-Hessiana (ou Hessiana aproximada).

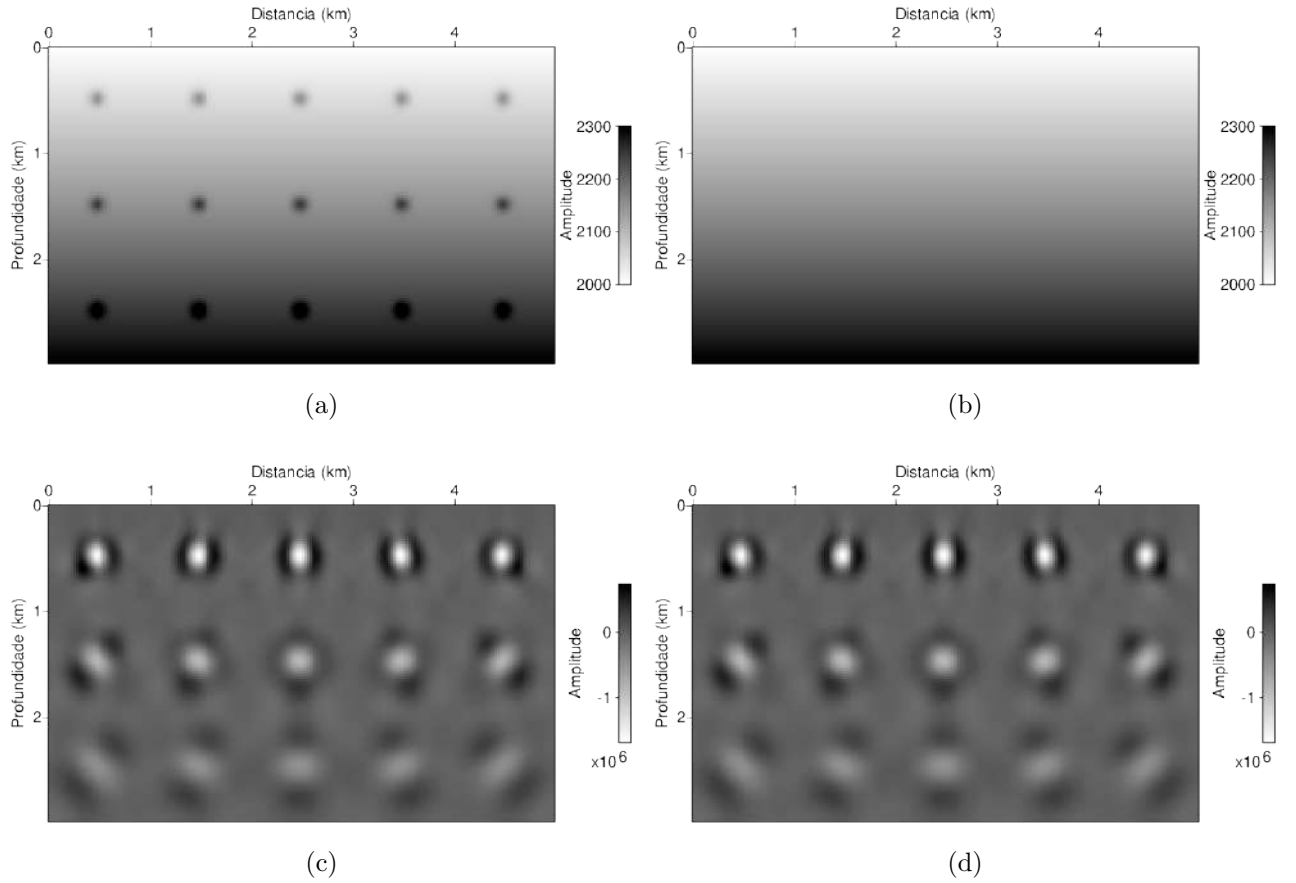


Figura 5.5.3: Parâmetro densidade  $\rho$ : (a) modelo verdadeiro com perturbação, (b) modelo de fundo (inicial), (c) resultado da direção de atualização convencional e (d) resultado da direção de atualização pré condicionada pelas transformações do inverso da pseudo-Hessiana (ou Hessiana aproximada).



### 5.5.6 Aplicação numérica: Modelo Marmousi-2 elástico

A fim de ilustrar a metodologia proposta em um modelo mais realista, esta seção descreve e ilustra uma aplicação numérica utilizando uma região do modelo elástico 2D Marmousi-2 [42]. O dado considerado para modelagem e inversão é uma aquisição do tipo 3C<sup>1</sup> (mais detalhes no Capítulo 6), no qual são consideradas as componentes de deslocamento vertical e horizontal e pressão.

A fim de reduzir o custo computacional foi utilizado uma pequena região do modelo original, focando apenas na região de reservatório de gás existente no modelo. O tamanho do modelo é de  $6510 \times 2280$  m. O modelo de velocidade compressional possui valores de 1100 m/s a 4500 m/s, o modelo de velocidade cisalhante de 600 m/s a 2600 m/s e a densidade de 1010 kg/m<sup>3</sup> a 2600 kg/m<sup>3</sup>. Os modelos verdadeiros estão ilustrados nas Figuras 5.5.4a, 5.5.5a e 5.5.6a.

Baixos valores de velocidade cisalhante exige a reamostragem da malha de diferenças finitas, que aumenta o custo computacional. Assim, os baixos valores de velocidade cisalhante próximo ao fundo do mar para o modelo de  $v_s$  são modificados considerando o seguinte critério:

$$v_s = \begin{cases} 0.6v_p & v_p < 3.5 \text{ km/s}, \\ \frac{1}{\sqrt{3}}v_p & v_p \geq 3.5 \text{ km/s}. \end{cases}$$

Esta abordagem já foi utilizada nas seguintes referências [10, 36, 63, 80, 84] para lidar com o modelo Marmousi-2, que reproduz características presentes num fundo marinho inconsolidado.

A geometria de aquisição consiste de um total de 43 fontes explosivas a 15 m de profundidade num intervalo de 150 m, 434 receptores localizados a 165 m de profundidade, com 15 m de intervalo numa geometria fixa e 9 segundos de registro.

Com relação à implementação computacional, a modelagem foi feita no domínio do tempo utilizando 600 m de bordas absorcivas, como proposto por CERJAN *et al.* [14], sem superfície livre. Já o processo de inversão foi realizado numa aproximação híbrida (domínios do tempo e da frequência), em que o campo de onda é computado no domínio do tempo e o gradiente é obtido no domínio da frequência aplicando a transformada discreta de Fourier por integração a cada passo de tempo. A motivação para o uso desta aproximação é a eficiência computacional [13, 67, 84]. A inversão inicia na frequência 1 Hz e termina com frequência de corte de 10 Hz com incremento de 1 Hz, para cada banda de frequência foram feitas 10 iterações. O modelo inicial para cada parâmetro foi obtido suavizando o modelo verdadeiro por um filtro triangular de 150 m de raio nas direções  $x$  e  $z$  (Figuras 5.5.4b, 5.5.5b e 5.5.6b). Para o resultado do l-BFGS, foi utilizada a implementação fornecida pela

---

<sup>1</sup>3C significa 3 componentes. Este caso é 2D, portanto faz-se uso de um hidrofone e dois geofones.

“SEISCOPE optimization toolbox” que é uma biblioteca de otimização não-linear baseada em comunicação reversa, que separa as rotinas dependendo da física do problema [46].

Os resultados da inversão para as velocidades e densidade para as metodologias de atualização elástica convencional, na qual utilizamos dois métodos de otimização local, gradiente-descendente (SD, do inglês *steepest-descent*) e l-BFGS, estão ilustrados nas Figuras 5.5.4c, 5.5.5c e 5.5.6c, 5.5.4d, 5.5.5d e 5.5.6d, respectivamente e os resultados utilizando as direções de atualização propostas nas Figuras 5.5.4e, 5.5.5e e 5.5.6e. Observa-se que todos estes resultados reconstroem bem as informações na região mais rasa. No entanto, na região mais profunda, ambos métodos convencionais não atualizam significativamente os modelos de propriedades. O método l-BFGS fornece uma imagem aprimorada comparada ao convencional padrão SD, enquanto que o método proposto reconstrói o modelo como um todo, pois é melhor escalado. Obteve-se a mesma conclusão previamente com a aplicação com pequenas perturbações como na Seção 5.5.5. No entanto, neste caso, a consequência de não se atualizar adequadamente  $v_p$  e  $v_s$  no método convencional (SD e l-BFGS) para maiores profundidades do modelo gera artefato de interferência (*cross-talk*) pronunciado para a inversão da densidade. Isso fica claro nas camadas a aproximadamente 2 km na Figura 5.5.6(c-d). Adicionalmente, pode-se analisar nos perfis de velocidade que para cada parâmetro ilustrado nas Figuras 5.5.4f, 5.5.5f e 5.5.6f, a direção do gradiente proposta condiz melhor com os modelos verdadeiros para todos os três parâmetros comparada ao convencional (SD e l-BFGS). Além disso, o gráfico contendo os valores da função objetivo (Figura 5.5.7) mostra que a escala das direções de atualização fornece uma taxa de convergência muito mais rápida que os convencionais SD e l-BFGS.

Este experimento numérico demonstra que utilizando as direções de atualizações obtidas pelo método convencional, por transformação de base de parâmetros com  $J^T$  (Equações 5.5.20a-5.5.20c), há aproximações aos respectivos modelos verdadeiros, porém restritas na região mais rasa para as velocidades compressionais e cisalhantes. Enquanto que os modelos resultantes para estes mesmos parâmetros (velocidades compressional e cisalhante) são aproximados ao modelo verdadeiro em toda a região, quando utiliza-se as direções de atualizações obtidas pela transformação de base de parâmetros através do  $J^{-1}$ , como apresentadas nas Equações 5.5.22a-5.5.22c, além de possuir mais rápida convergência.

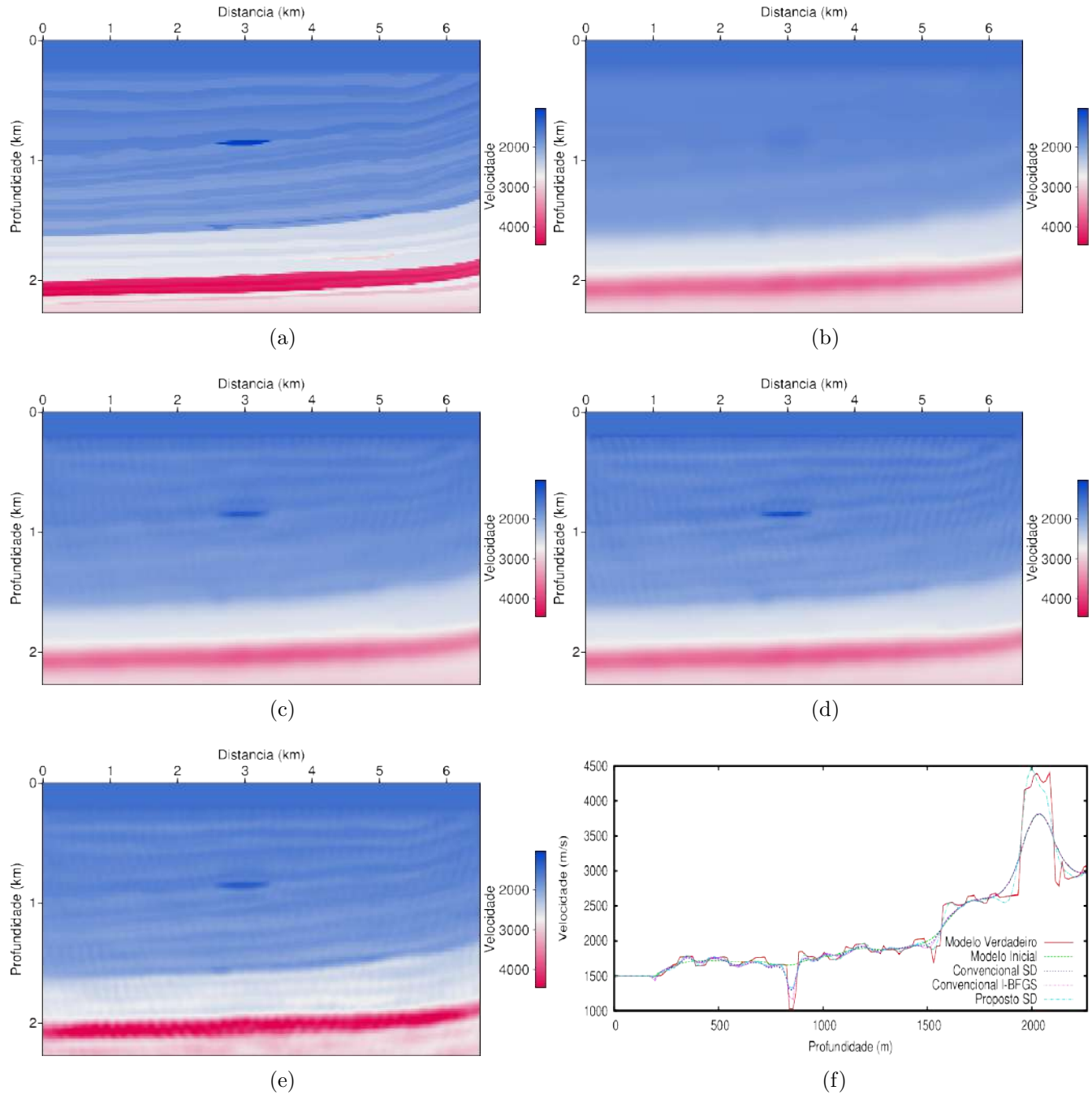


Figura 5.5.4: Velocidade compressional: (a) O modelo verdadeiro (Marmousi-2). (b) Modelo inicial. Em (c) e (d) resultados da inversão utilizando a direção de atualização convencional (pela transformação do Jacobiano transposto), sendo (c) com gradiente-descendente e em (d) com l-BFGS. (e) Inversão utilizando a direção de atualização proposta (pela transformação do Jacobiano inverso). (f) Comparação dos perfis de velocidade através do modelo Marmousi-2 modificado a 3000 m na direção  $x$ .

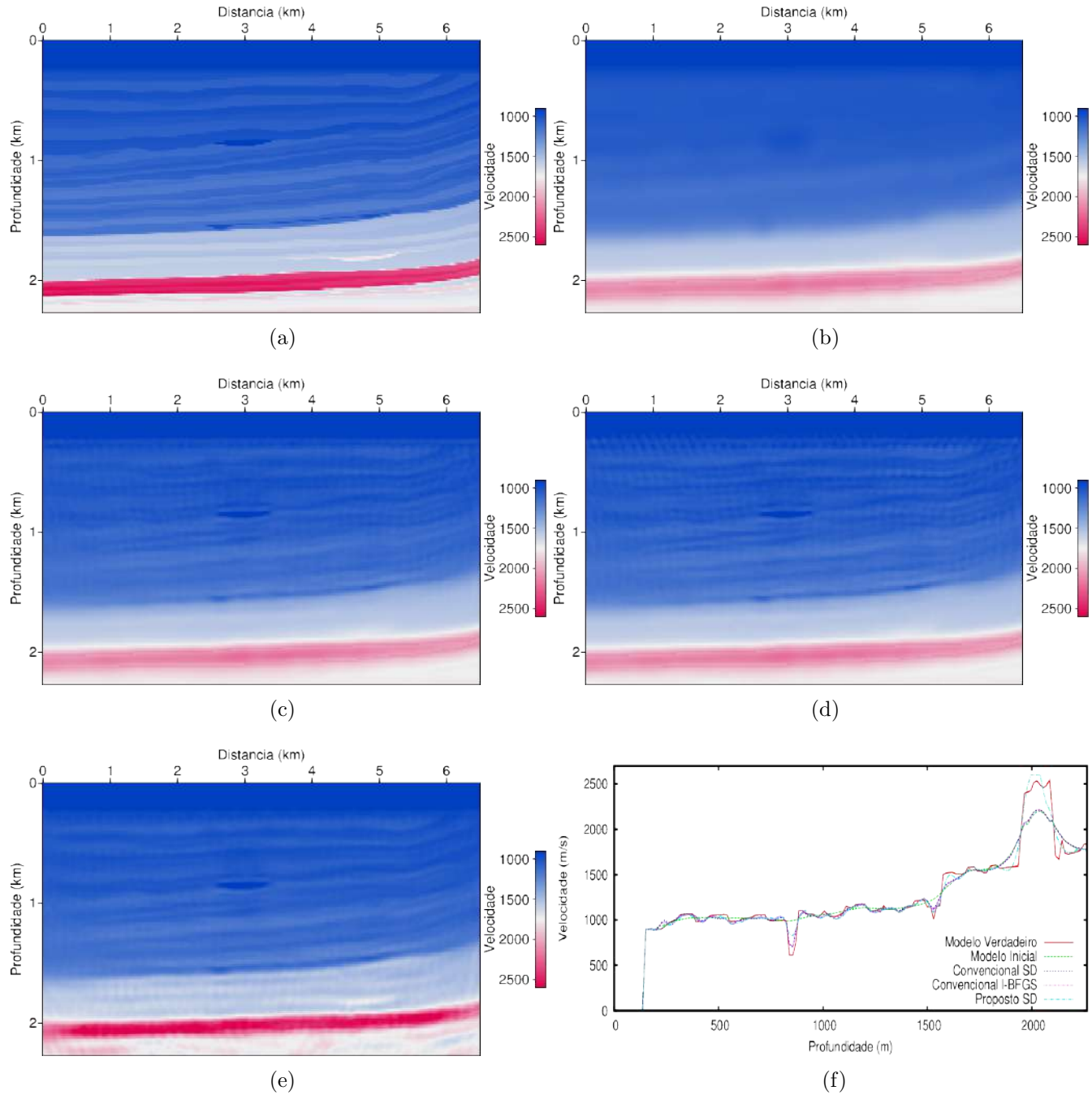


Figura 5.5.5: Velocidade cisalhante: (a) O modelo verdadeiro (Marmousi-2). (b) Modelo inicial. Em (c) e (d) resultados da inversão utilizando a direção de atualização convencional (pela transformação do Jacobiano transposto), sendo (c) com gradiente-descendente e em (d) com l-BFGS. (e) Inversão utilizando a direção de atualização proposta (pela transformação do Jacobiano inverso). (f) Comparação dos perfis de velocidade através do modelo Marmousi-2 modificado a 3000 m na direção  $x$ .

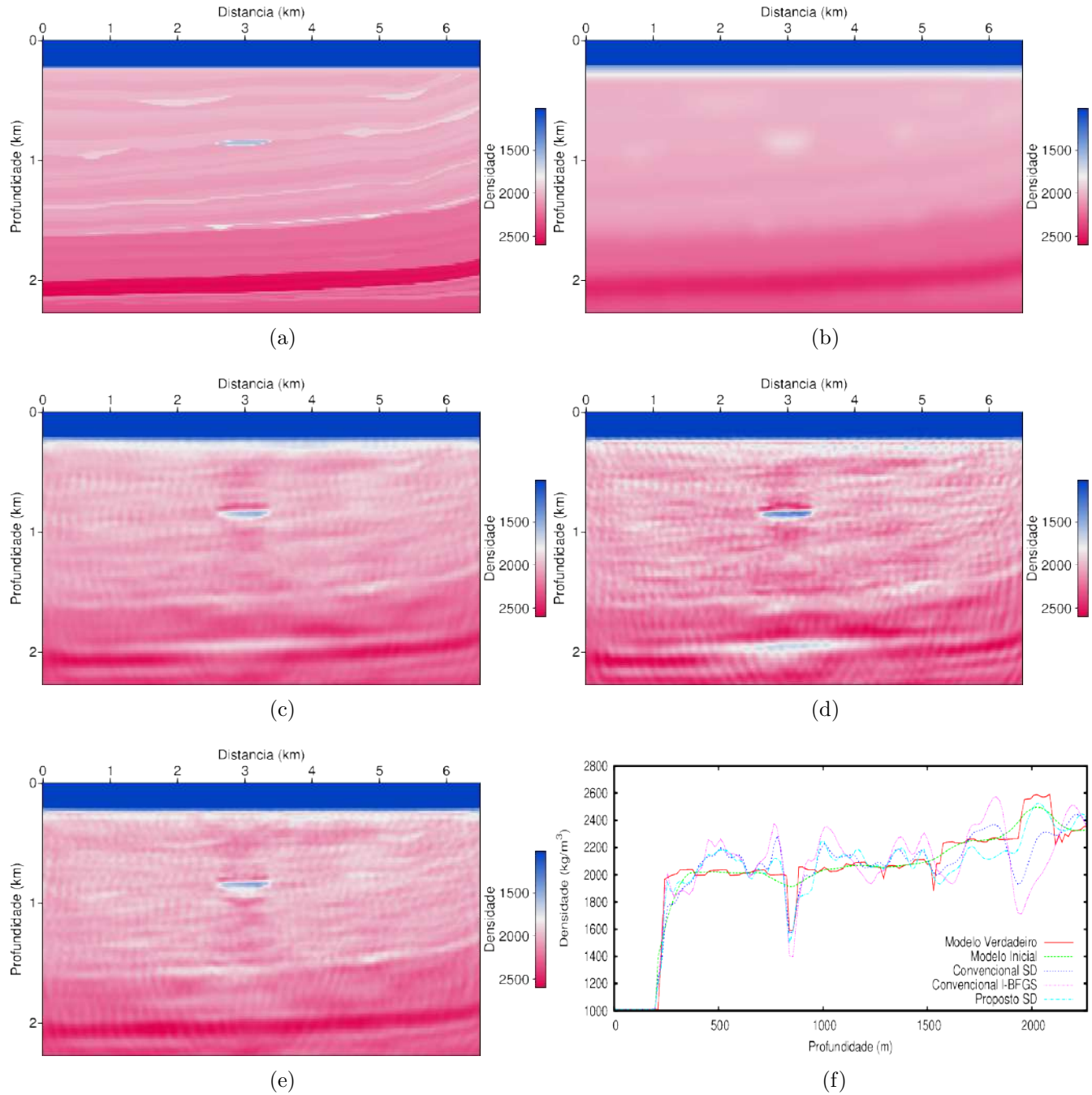


Figura 5.5.6: Densidade: (a) O modelo verdadeiro (Marmousi-2). (b) Modelo inicial. Em (c) e (d) resultados da inversão utilizando a direção de atualização convencional (pela transformação do Jacobiano transposto), sendo (c) com gradiente-descendente e em (d) com l-BFGS. (e) Inversão utilizando a direção de atualização proposta (pela transformação do Jacobiano inverso). (f) Comparação dos perfis de densidade através do modelo Marmousi-2 modificado a 3000 m na direção  $x$

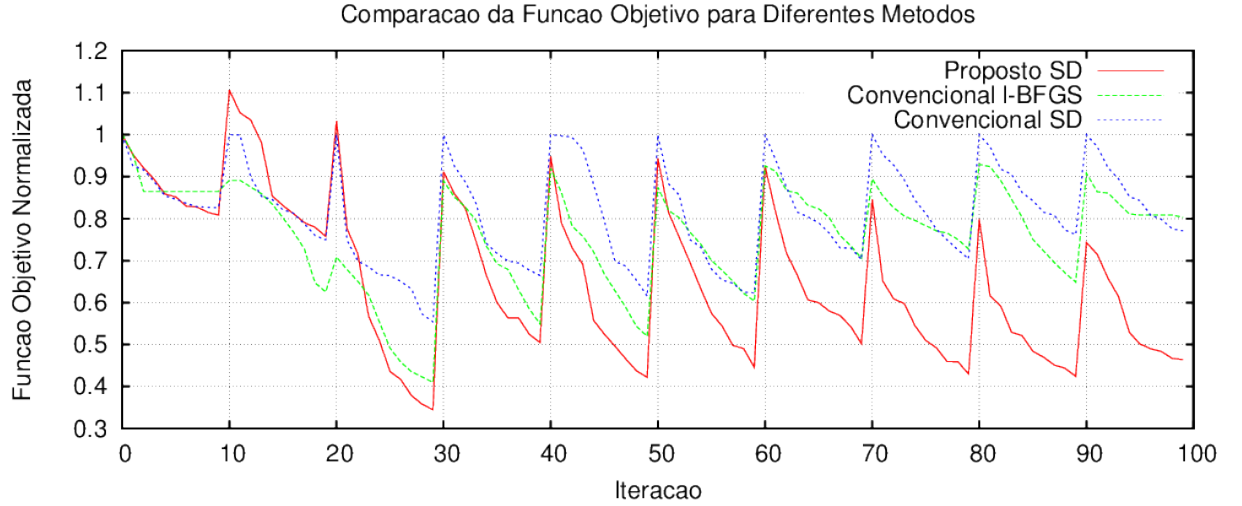


Figura 5.5.7: Comparação das funções objetivos para o método convencional (gradiente-descendente (SD) e l-BFGS) e do método proposto.

## 5.6 Conclusões

Neste capítulo foi proposta uma nova metodologia para garantir uma direção de atualização melhor escalada. Para tal, foram demonstradas e comparadas numericamente as propriedades de reparametrização baseada no gradiente (metodologia convencional) e na Hessiana aproximada (metodologia proposta). É importante ressaltar que o método proposto mantém unidades apropriadas para as direções de atualização, diferentemente do caso convencional de direção de atualização. Esta nova metodologia foi implementada para os casos acústico e elástico isotrópico 2D.

Os resultados numéricos utilizando a metodologia proposta, comparado ao convencional (gradiente-descendente e l-BFGS), fornecem melhores modelos atualizados como um todo e mais rápida taxa de convergência, sem aumento de custo computacional para cada iteração. Futuramente, pode-se implementar numericamente para o caso elástico isotrópico 3D, já calculado neste trabalho no Apêndice D. Apenas por questões de limitações de custo computacional e tempo não foi implementado para esta tese.



# Capítulo 6

## FWI elástico usando dados de multicomponentes

### 6.1 Introdução

O sistema de aquisição sísmica multicomponentes ocorre tanto em aquisições sísmicas marinha como terrestre. No caso de aquisição sísmica marinha, uma modalidade cada vez mais comum é OBS (do inglês *Ocean bottom surveys*, que designa aquisições do tipo OBC (*Ocean Bottom Cables*) ou OBN (*Ocean Bottom Nodes*)). Geralmente, o sistema de registro possui quatro componentes (4C), sendo um hidrofone, que mede pressão, e geofone com três componentes direcionais, capazes de medir ou aceleração ou velocidade de partícula. Também existem tecnologias com uso de multicomponentes em cabos com sensores rebocados por navios (*Streamers*), que geralmente combina um hidrofone e acelerômetros, e sísmica com receptores acoplados a poços (VSP, do inglês *Vertical Seismic Profile*). No caso terrestre, são utilizados geofones com três componentes direcionais (3C). A Figura 6.1.1 ilustra um diagrama dos sensores que compõem um receptor de multicomponentes marinho.

Este sistema tem sido reconhecido na indústria de aquisição sísmica por ser capaz de registrar modos de onda compressional (onda-P) e cisalhante (onda-S), que juntos fornecem informações complementares de propagação da onda no meio e dos contrastes entre as interfaces de subsuperfícies. A combinação dos três sensores direcionais do geofone registra o campo de onda elástico completo. Desta forma, teoricamente, pode-se realizar o imageamento sísmico com maior acurácia, além de auxiliar em caracterização de reservatórios.

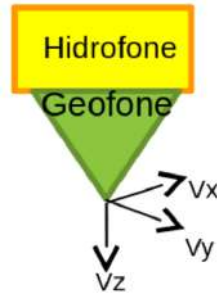


Figura 6.1.1: Representação esquemática dos sensores contidos em um *ocean bottom node* para uma aquisição 4C: um hidrofone (componente de pressão  $P$ ) e um geofone com três componentes direcionais, sendo  $V_z$ , componente vertical, e  $V_x$  e  $V_y$  componentes horizontais.

Outras vantagens que se destacam no uso de multicomponentes são:

- Maior facilidade na remoção de reflexão de fantasmas<sup>1</sup>, feita através da separação dos campos de ondas ascendentes dos campos de ondas descendentes. Isto é possível através da soma entre os dados do hidrofone e da componente vertical do geofone. Este processo é conhecido por soma PZ [71].
- Possibilidade de obtenção de amplo azimuth<sup>2</sup> sem a necessidade do uso de muitos navios, tal como é necessário no uso de receptores em cabos rebocados.
- Maior precisão em sísmica 4D, uma vez que é importante ter as aquisições sobre o mesmo campo o mais similar possível, em termos de posicionamento geométrico, entre a aquisição mais antiga (denominada base) e a mais recente (denominada monitor), pois o reposicionamento dos sensores no fundo marinho é mais preciso que dos sensores de cabos rebocados por navios, que são mais instáveis, devido aos efeitos de deslocamento de correntes marítimas (*feathering*).
- Uma outra vantagem é a possibilidade de posicionar os sensores de fundo marinho em áreas próximas de plataformas, o que é um desafio em aquisições que utilizam cabos rebocados, tornando tal região pobre de cobertura.

Este capítulo tem por objetivo analisar as divergências entre os modelos resultantes da inversão por FWI elástico dependente da escolha do dado de multicomponente utilizado. Uma vez que os receptores de multicomponentes produzem diferentes sismogramas, pode-se empregá-los como dados de entrada para a inversão, individualmente ou por combinação dos mesmos.

<sup>1</sup>Registro da trajetória da onda emitida pela fonte sísmica que teve reflexão na superfície da água.

<sup>2</sup>Dependente da geometria da aquisição.



Para tal investigação foi utilizado o modelo chamado CTS (do inglês, *Cross-Triangle-Squares*), similar ao apresentado por KÖHN [35]. Cada modelo de parâmetro é composto por um determinado corpo geométrico: os modelos  $v_p$  são formados por cruces,  $v_s$  formados por triângulos e o modelos de densidade  $\rho$  por quadrados. Apesar de estes modelos não representarem situações geológicas realísticas, é uma forma eficiente de demonstrar a resolução e a ambiguidade dos resultados de FWI para diferentes parâmetros elásticos, podendo facilitar a identificação de interferências (*cross-talk*) entre os modelos.

Levando em consideração que o método FWI se torna altamente não linear quando se tenta reconstruir mais de um parâmetro, este experimento consiste em verificar o comportamento da inversão para casos de monoparâmetros e multiparâmetros simultaneamente utilizando combinações de três componentes: direções vertical ( $Vz$ ) e horizontal ( $Vx$ ) do geofone e hidrofone ( $P$ ). O conjunto de parâmetros utilizado é  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ . Ao todo foram realizadas 75 casos de inversões.

## 6.2 Aplicação numérica

A aplicação numérica foi realizada considerando dados de multicomponentes. O registro abrange 3 sensores, sendo um hidrofone, que mede a pressão ( $P$ ) e dois geofones, para medir velocidade nas direções vertical ( $Vz$ ) e horizontal ( $Vx$ ), denominada por 3C/2D. A formulação utilizada para a modelagem e direções de atualização convencional são conforme a Seção 5.5 para o caso 2D isotrópico. Os processos de modelagem e inversão estão descritos nas seções seguintes.

### 6.2.1 Modelagem

Dados sintéticos foram gerados com a finalidade de serem os sismogramas de entrada (dado observado) para a inversão FWI. Para tal, foram efetuadas ao todo seis modelagens de três componentes ( $P$ ,  $Vz$ ,  $Vx$ ). A seguir são descritos os modelos de parâmetros elásticos utilizados:

- Modelo de perturbação da velocidade da onda-P ( $v_p$ ): possui três cruces com 1500 m/s (dentro de cada cruz), 2000 m/s fora e uma segunda camada com 3000 m/s (Figura 6.2.1a).
- Modelo de perturbação da velocidade da onda-S ( $v_s$ ): possui três triângulos com 850 m/s dentro de cada triângulo, 1150 m/s fora e uma segunda camada com 1700 m/s (Figura 6.2.1b).

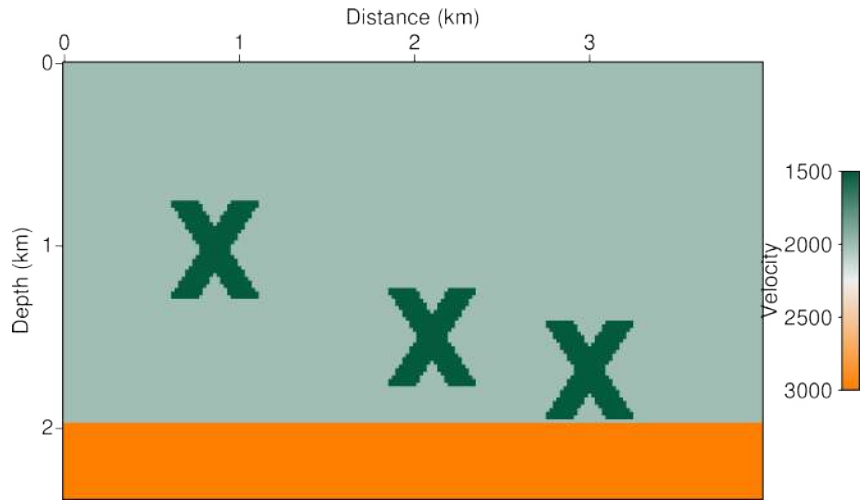
Tabela 6.1: Tabela de modelagem com multicomponentes.

Modelagem	Perturbação
1	$v_p$
2	$v_s$
3	$\rho$
4	$v_p, v_s$
5	$v_p, \rho$
6	$v_p, v_s, \rho$

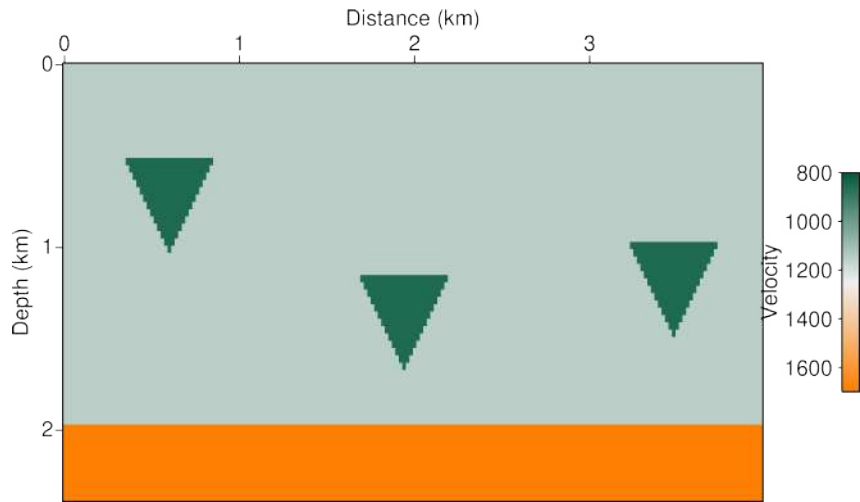
- Modelo de perturbação da densidade ( $\rho$ ): possui três quadrados com 2300 kg/m<sup>3</sup> dentro de cada quadrado, 2000 kg/m<sup>3</sup> fora e uma segunda camada com 2300 kg/m<sup>3</sup> (Figura 6.2.1c).

A Tabela 6.1 apresenta seis modelagens, sendo cada uma com os respectivos modelos de perturbações indicados para a geração do dado observado.

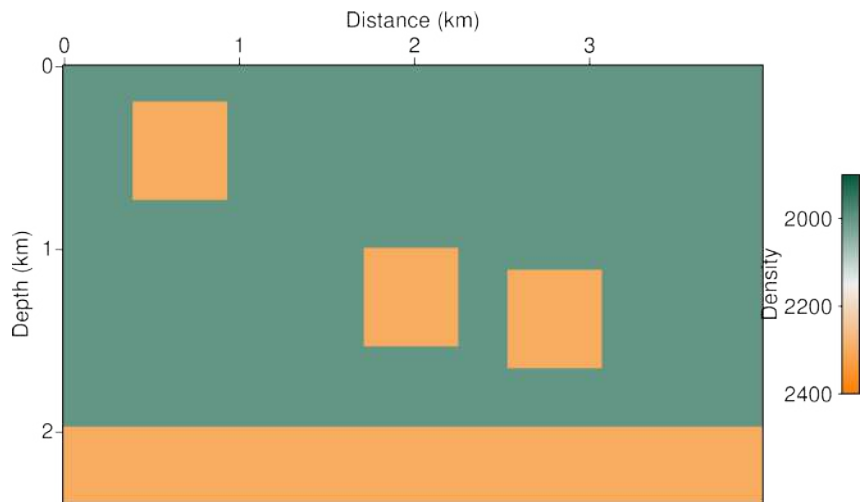
A implementação da modelagem foi feita no domínio do tempo, utilizando operador de otimização de diferenças finitas de oitava ordem, frequência de corte de 10 Hz e bordas absorcivas de CERJAN *et al.* [14] de 1000 m sem superfície livre. A geometria de aquisição é fixa com duração de registro de 6 segundos, consiste de 11 fontes explosivas a cada 500 m na direção  $x$ , posicionadas a um datum de 25 m, 200 receptores localizados a 25 m de profundidade com espaçamento de 25 m. Os sismogramas resultantes das modelagens utilizando os modelos de parâmetros citados na Tabela 6.1 de cada componente (hidrofone, geofone vertical e geofone horizontal) estão apresentados respectivamente nas Figuras 6.2.2, 6.2.3 e 6.2.4.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.2.1: Modelos verdadeiros elásticos: em (a) modelo com três cruzeiros indicando perturbação de velocidade compressional  $v_p$ ; em (b) modelo com três triângulos indicando perturbação de velocidade cisalhante  $v_s$  e; (c) modelo com três quadrados indicando perturbação de densidade  $\rho$ .

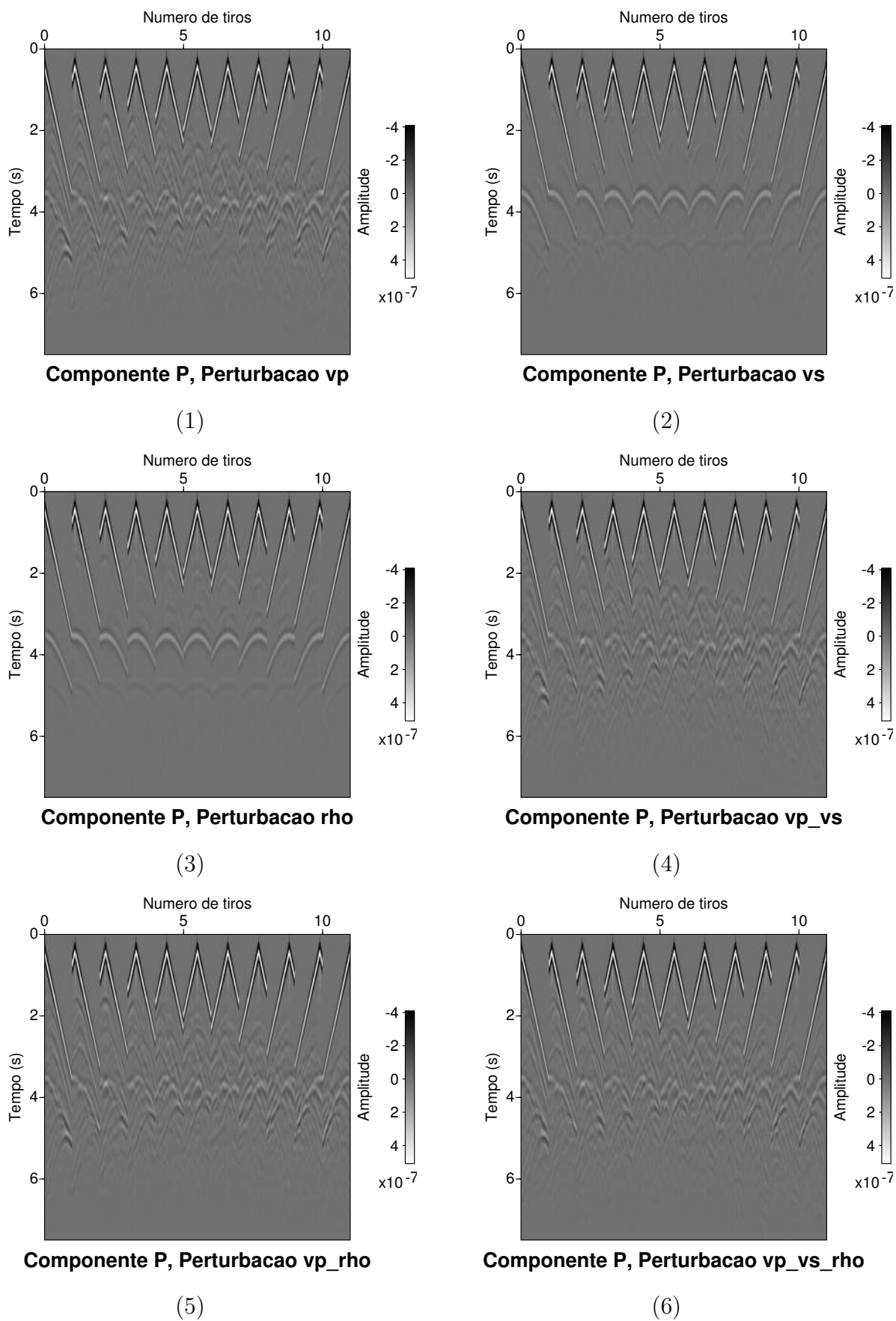
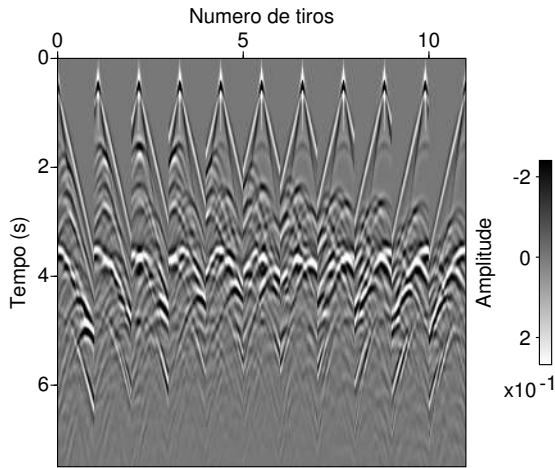
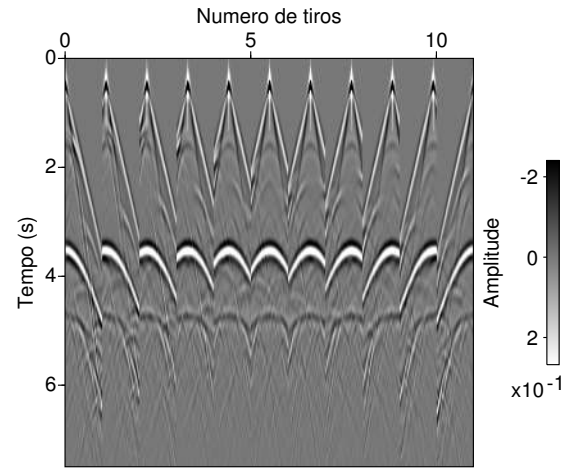


Figura 6.2.2: Sismogramas do Hidrofone resultantes das modelagens 1-6, conforme apresentadas na Tabela 6.1.



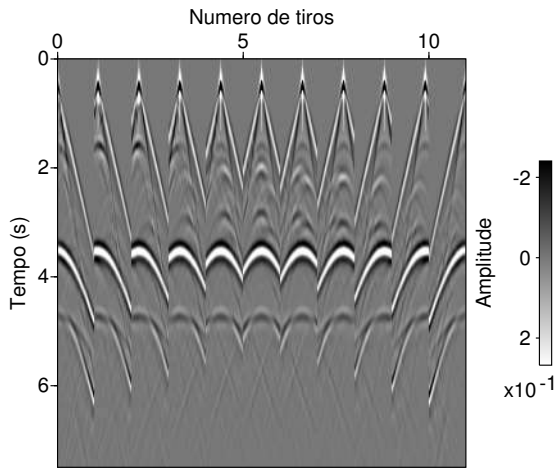
**Componente Vz, Perturbacao vp**

(1)



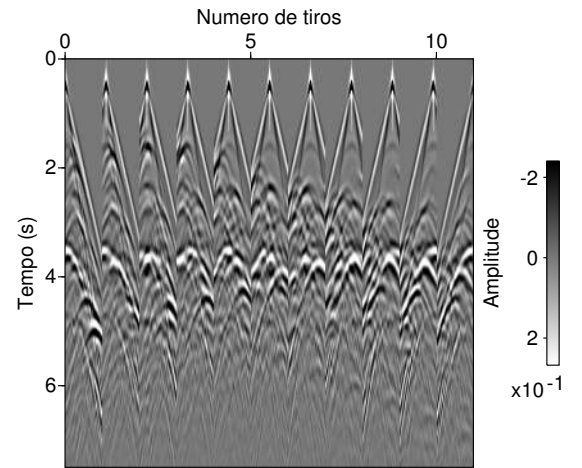
**Componente Vz, Perturbacao vs**

(2)



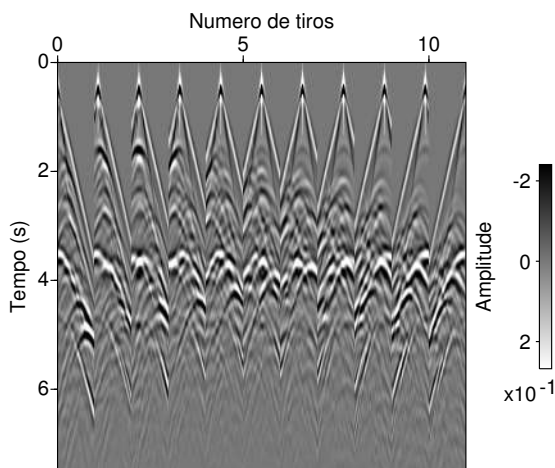
**Componente Vz, Perturbacao rho**

(3)



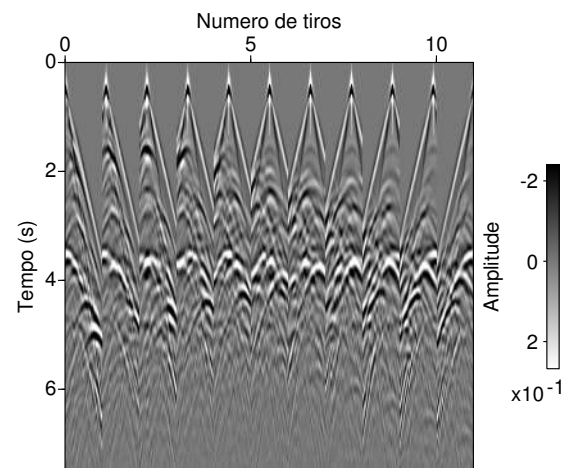
**Componente Vz, Perturbacao vp\_vs**

(4)



**Componente Vz, Perturbacao vp\_rho**

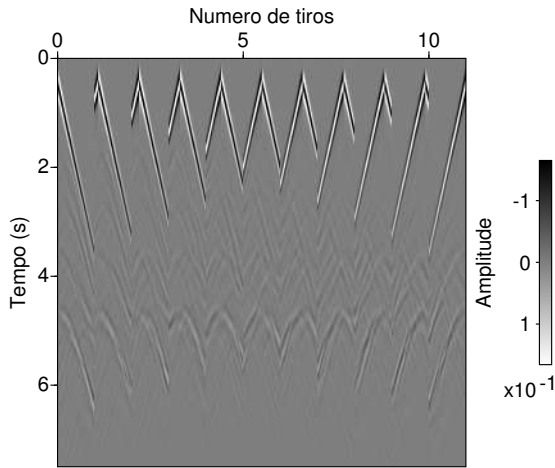
(5)



**Componente Vz, Perturbacao vp\_vs\_rho**

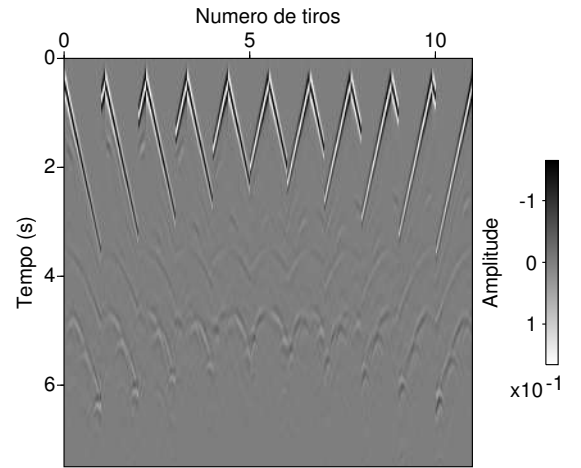
(6)

Figura 6.2.3: Sismogramas da componente vertical Vz do geofone resultantes das modelagens 1-6, conforme apresentadas na Tabela 6.1.



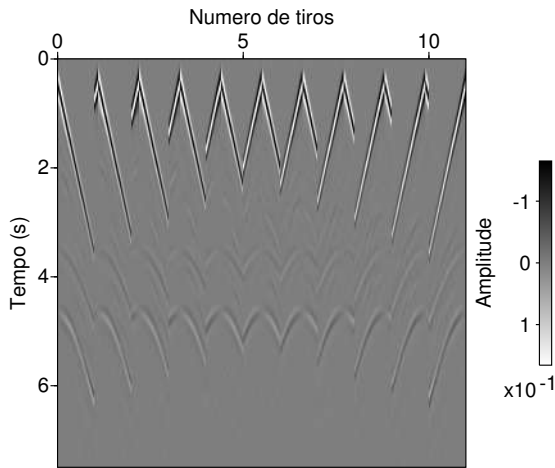
**Componente Vx, Perturbacao vp**

(1)



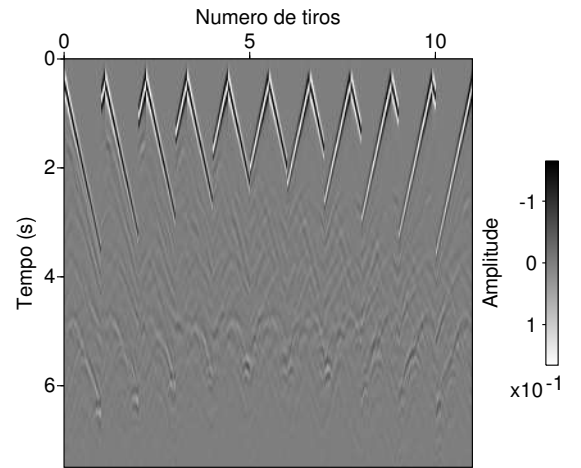
**Componente Vx, Perturbacao vs**

(2)



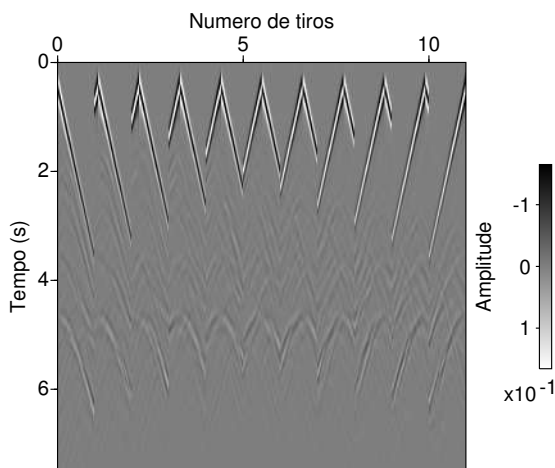
**Componente Vx, Perturbacao rho**

(3)



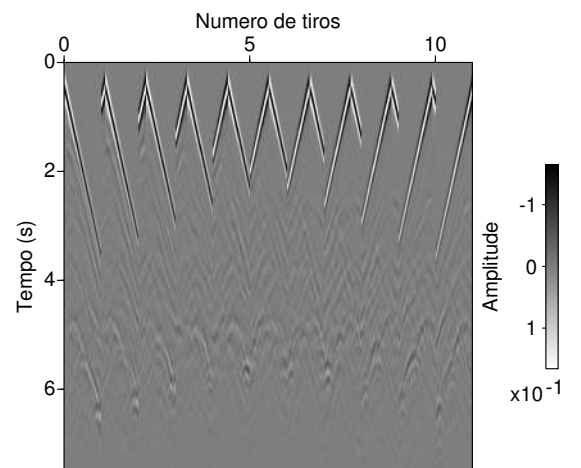
**Componente Vx, Perturbacao vp\_vs**

(4)



**Componente Vx, Perturbacao vp\_rho**

(5)



**Componente Vx, Perturbacao vp\_vs\_rho**

(6)

Figura 6.2.4: Sismogramas da componente horizontal Vx do geofone resultantes das modelagens 1-6, conforme apresentadas na Tabela 6.1.

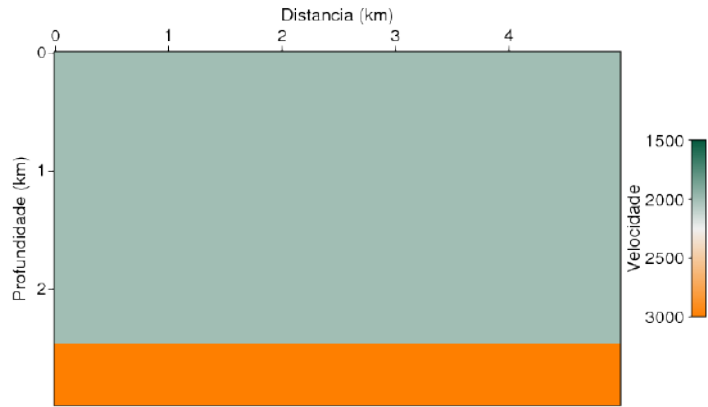
### 6.2.2 Inversão

Este experimento de inversão tem como objetivo investigar a influência da escolha dos dados de entrada para a inversão com FWI. Para tal, foram feitas combinações entre componentes do dado observado ( $P$ ,  $Vz$  e  $Vx$ ) e perturbações a serem consideradas ( $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ ), tanto do dado de entrada (gerado pela modelagem), como das inversões. A finalidade é avaliar os modelos dos parâmetros resultantes de cada inversão. Ao todo são 75 casos de inversões. O Apêndice E ilustra as Tabelas E.1-E.15 onde estão definidos os 75 casos de inversão testados, indicando os modelos perturbados na modelagem, os modelos atualizados na inversão e o dado observado de entrada para a inversão.

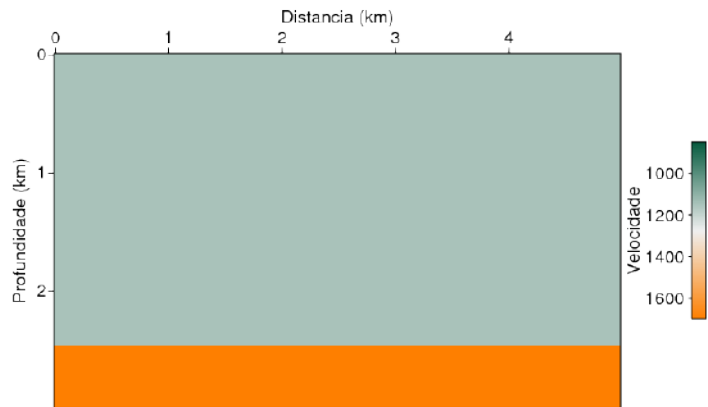
O processo de inversão foi realizado numa aproximação híbrida, onde o campo de onda modelado é computado no domínio do tempo e o gradiente é obtido no domínio da frequência aplicando a transformada discreta de Fourier por integração passo de tempo. A motivação para o uso desta aproximação é a eficiência computacional [13, 67, 84].) utilizando técnica de multi-escala, com largura de banda de frequências de 1 a 9 Hz e intervalo de 1 Hz, sendo para cada banda, 15 iterações. O modelo inicial de cada parâmetro ( $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ ) estão representados na Figura 6.2.5, possuindo os mesmos valores nas camadas do modelo verdadeiro, porém sem a inserção dos símbolos CTS:

1. Para  $v_p$  primeira camada de 2000 m/s e a segunda camada com 3000 m/s;
2. Para  $v_s$  primeira camada de 1150 m/s e a segunda camada com 1700 m/s;
3. Para  $\rho$  primeira camada de 2000 kg/m<sup>3</sup> e a segunda camada com 2300 kg/m<sup>3</sup>.

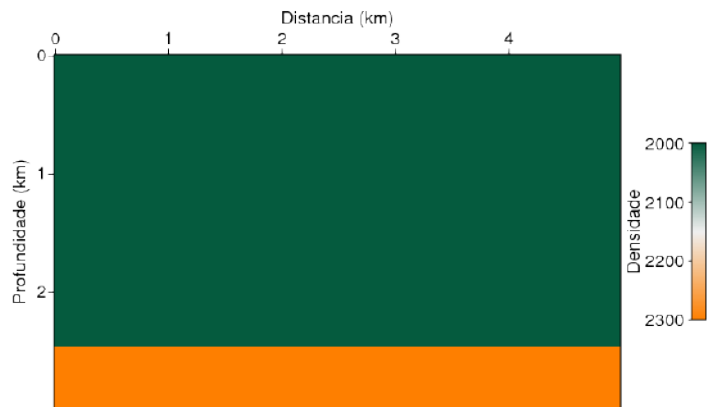




(a)



(b)



(c)

Figura 6.2.5: Modelos elásticos iniciais: em (a) modelo inicial de perturbação de velocidade compressional  $v_p$ ; em (b) modelo inicial de perturbação de velocidade cisalhante  $v_s$  e; (c) modelo inicial de perturbação de densidade  $\rho$ .



## 6.3 Discussão dos resultados

A fim de avaliar esta extensiva lista de testes de inversão, esta análise foi dividida em três categorias:

1. Inversão monoparâmetro:

Apenas um modelo de parâmetro ( $v_P$ ,  $v_s$  ou  $\rho$ ) é atualizado. Os resultados podem ser vistos nas Figuras 6.3.1-6.3.3;

2. Inversão de dois parâmetros simultâneos:

- (a)  $v_p$  e  $v_s$  são atualizados simultaneamente utilizando resultado da modelagem 4 conforme a Tabela 6.1 como dado de entrada. Os resultados estão ilustrados nas Figuras 6.3.4,
- (b)  $v_p$  e  $\rho$  são atualizados simultaneamente utilizando resultado da modelagem 5 conforme a Tabela 6.1 como dado de entrada. Os resultados estão ilustrados nas Figuras 6.3.5,
- (c) Ainda para a inversão simultânea de dois parâmetros, utilizou-se também a modelagem de três modelos perturbações ( $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ ) (caso 6, conforme a Tabela 6.1). A Figura 6.3.6 ilustra os resultados da inversão simultânea de  $v_p$  e  $v_s$  e a Figura 6.3.7 de  $v_p$  e  $\rho$ .

3. Inversão de três parâmetros simultâneos:

Neste caso também se utiliza a modelagem 6, conforme a Tabela 6.1, no entanto a inversão é realizada simultaneamente para os três parâmetros  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ . A Figura 6.3.8 ilustra estes resultados.

### 6.3.1 Resultados de inversão de monoparâmetro

As Figuras 6.3.1-6.3.3 ilustram os resultados de inversão de monoparâmetros. Cada coluna representa a perturbação utilizada para geração do dado observado e, cada linha, a combinação de componentes utilizadas como dado de entrada da inversão. O Apêndice E ilustra as mesmas figuras, separadas por combinação de dado de componentes de entrada com a barra de escala.

As Figuras 6.3.1-6.3.3, linha  $P$  ilustra os resultados para o caso 1, que utiliza a componente  $P$ . Observa-se que 6.3.1(a) e 6.3.3(a) convergiram a modelos próximos dos modelos verdadeiros, enquanto que 6.3.2(a) não foi reconstruído adequadamente. Apesar dos bons resultados de 6.3.1(a) e 6.3.3(a), estes casos são casos menos realistas, pois há apenas perturbação dos respectivos modelos resultantes da inversão, portanto a não linearidade é baixa. No caso de 6.3.2(a), modelo de  $v_s$ , ocorre que

o registro de pressão é insensível à onda-S. A onda-S é uma onda cisalhante, que se desloca perpendicularmente à direção de propagação sem alterar o volume do meio, portanto não perturba a componente de pressão. Para os casos em que se utilizou mais de um modelo de perturbação na modelagem, apenas os modelos de  $v_p$  obtiveram resultados satisfatórios. Pode-se concluir que em casos de uso de dados mais realistas, o uso da componente de pressão não é suficiente para se obter modelos de  $v_s$  e  $\rho$ .

As Figuras 6.3.1-6.3.3, linha  $Vz$  ilustra os resultados do caso 2, que utiliza a componente vertical do geofone ( $Vz$ ). No item (b) das Figuras 6.3.1-6.3.3 os dados de entrada foram feitos através das modelagens 1-3, respectivamente utilizando apenas um parâmetro. Portanto, durante a inversão não houve interferência dos outros modelos, o que diminuiu a não linearidade, obtendo-se resultados bem próximos aos modelos verdadeiros. Para os casos de modelagem com mais de um modelo de perturbação, não houve reconstrução de modelos satisfatórios para  $v_s$  e  $\rho$ , enquanto que para  $v_p$  não houveram muitas diferenças entre o uso dos dados de  $P$  ou  $Vz$ .

As Figuras 6.3.1-6.3.3, linha  $Vx$  ilustra os resultados que utiliza a componente horizontal do geofone ( $Vx$ ). Observa-se que ao se utilizar mais de um modelo de perturbação, nenhum modelo de parâmetro é reconstruído de forma razoável, inclusive para  $v_p$  e, principalmente quando há perturbação do modelo de  $v_s$ . Em (1) o dado observado não possui perturbação de  $v_s$ , apenas  $v_p$  e  $\rho$ .

As Figuras 6.3.1-6.3.3, linhas  $P$ ,  $Vz$  e  $P$ ,  $Vz$  e  $Vx$  utilizam, respectivamente, as componentes  $P$ ,  $Vz$  e  $P$ ,  $Vz$  e  $Vx$ . Pode ser observado que os resultados destes dois casos foram similares. Os resultados dos modelos de  $v_s$  e  $\rho$  não foram satisfatórios. Pode-se concluir que inversão de monoparâmetro não é suficiente para se obter modelos de  $v_s$  e  $\rho$ .

Conclui-se que apenas modelos do parâmetro  $v_p$  pode ser reconstruído de forma satisfatória por inversão monoparâmetro. Verificando os dados mais realistas, da modelagem 6, observa-se que o modelo resultante que ficou melhor reconstruído, foi (d), que utiliza dado somente da componente  $P$ .

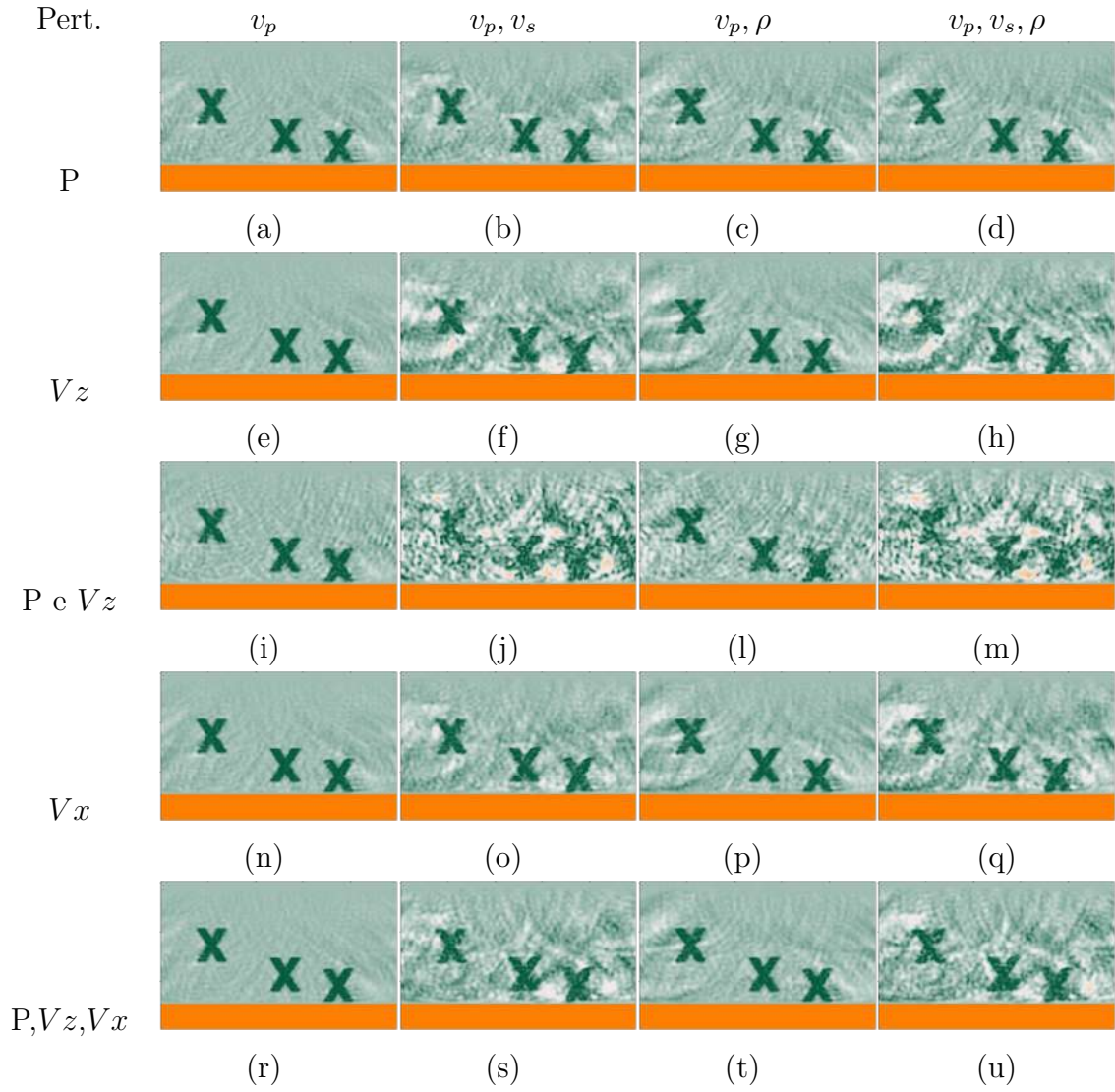


Figura 6.3.1: Resultados da inversão para  $v_p$ . Na primeira linha (a-d) são resultados utilizando dado de  $P$ . Na segunda linha (e-h) são resultados utilizando o dado de  $V_z$ . Na terceira linha (i-m), utilizando dado de  $P$  e  $V_z$ . Na quarta (n-q) linha de  $V_x$ . Na quinta linha (r-u) estão os resultados da combinação das três componentes.

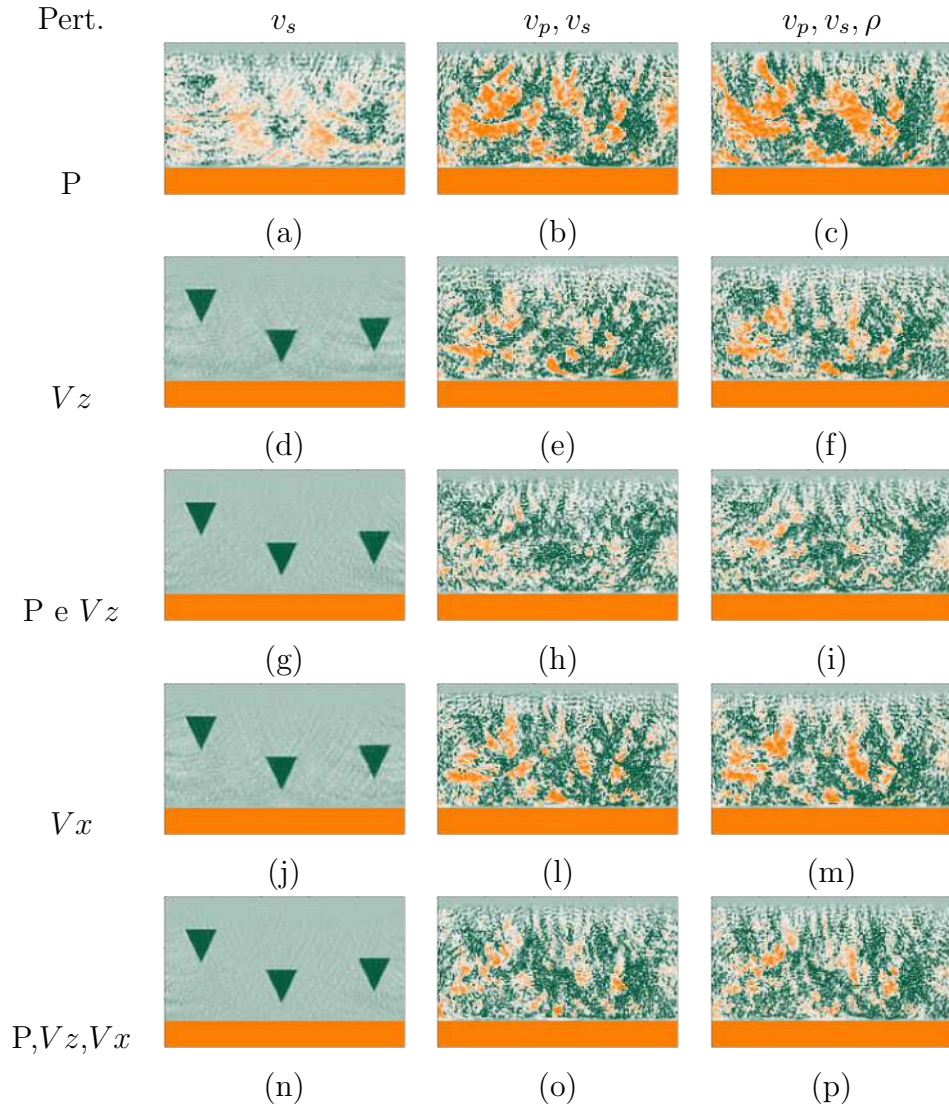


Figura 6.3.2: Resultados da inversão para  $v_s$ . Na primeira linha (a-c) são resultados utilizando dado de  $P$ . Na segunda linha (d-f) são resultados utilizando o dado de  $Vz$ . Na terceira linha (g-i), utilizando dado de  $P$  e  $Vz$ . Na quarta (j-m) linha de  $Vx$ . Na quinta linha (n-p) estão os resultados da combinação das três componentes.

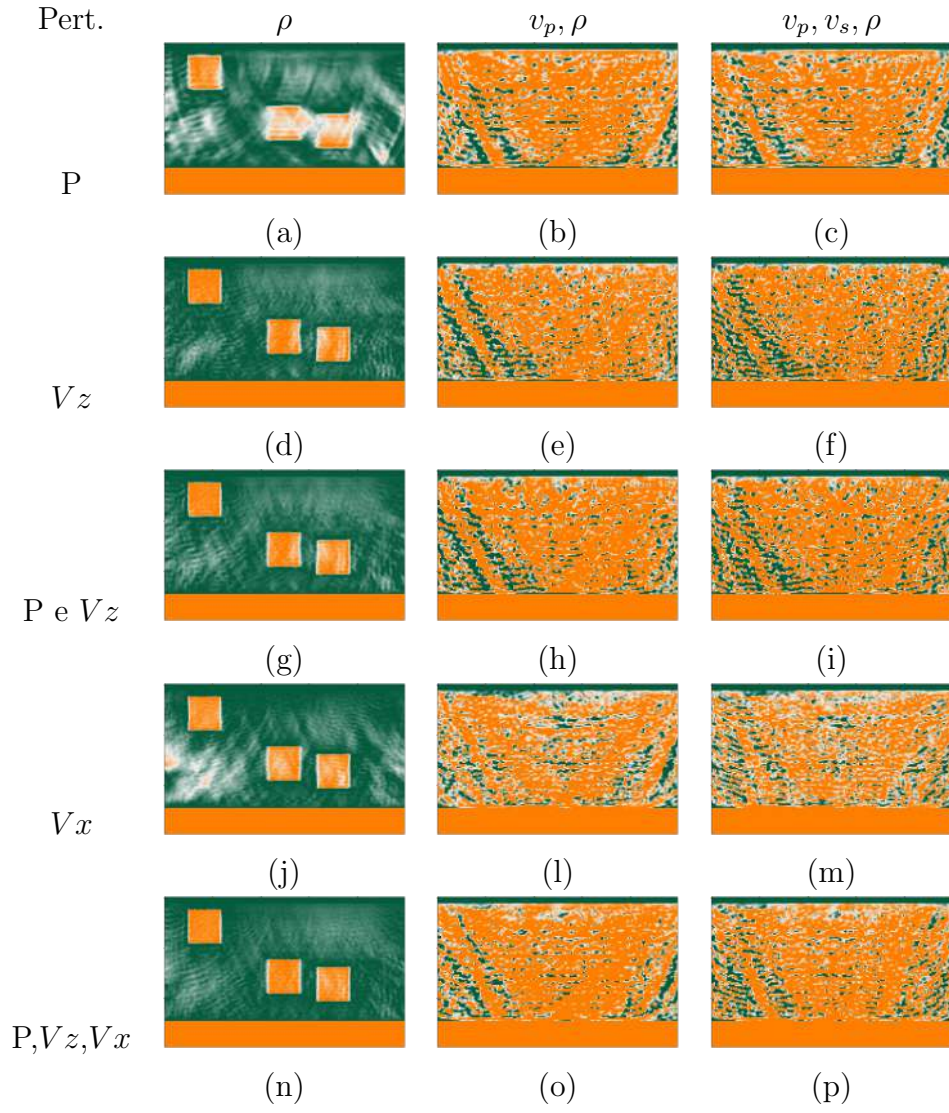


Figura 6.3.3: Resultados da inversão para  $v_s$ . Na primeira linha (a-c) são resultados utilizando dado de  $P$ . Na segunda linha (d-f) são resultados utilizando o dado de  $V_z$ . Na terceira linha (g-i), utilizando dado de  $P$  e  $V_z$ . Na quarta (j-m) linha de  $V_x$ . Na quinta linha (n-p) estão os resultados da combinação das três componentes.



### 6.3.2 Categoria 2: inversão simultânea para dois parâmetros

Os resultados para inversão de dois parâmetros simultâneos estão divididos em três casos:

1. dados de entrada gerados com modelos de perturbação  $v_p$  e  $v_s$ , ilustrados na Figura 6.3.4,
2. dados de entrada gerados com modelos de perturbação  $v_p$  e  $\rho$ , ilustrados na Figura 6.3.5,
3. dados de entrada gerados com modelos de perturbação  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ , ilustrados nas Figuras 6.3.6 e 6.3.7.

Para o caso 1 (Figura 6.3.4), observa-se novamente que o modelo de  $v_s$  não é reconstruído com dado da componente  $P$ , no entanto, para as demais combinações de componentes, tanto os modelos de  $v_p$  como  $v_s$  foram reconstruídos de forma satisfatória, sendo o melhor resultado, avaliado visualmente, é com o uso de todas as três componentes ( $P$ ,  $Vz$  e  $Vx$ ).

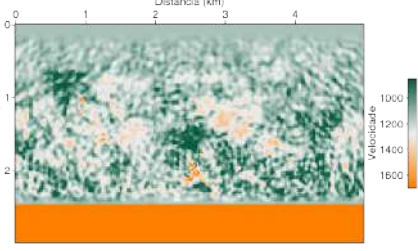
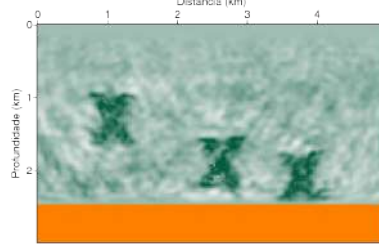
Para o caso 2, o modelo de  $v_p$  foi reconstruído de forma razoável (ou seja, aproximou-se do modelo verdadeiro), no entanto, visualmente, menos acurado que o caso 1 (descrito acima) e o modelo de  $\rho$  foi fracamente aproximado ao respectivo modelo verdadeiro.

Para o caso 3, conclui-se similarmente ao caso 1 (para inversão  $v_p$  e  $v_s$ ) e caso 2 (para inversão  $v_p$  e  $\rho$ ), porém os resultados foram menos aproximados do modelo verdadeiro. Além disso, observa-se que na Figura 6.3.6 aparece interferência do modelo de  $\rho$ , que não foi atualizado. Efeito similar ocorre na Figura 6.3.7, onde  $v_s$  não foi atualizado.

Pert.

$v_p, v_s$

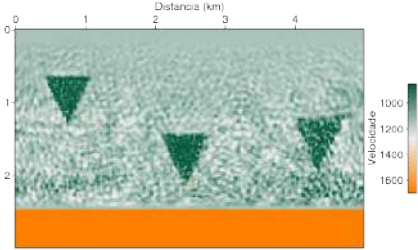
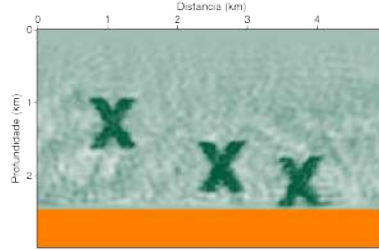
$v_p, v_s$



P

(a)

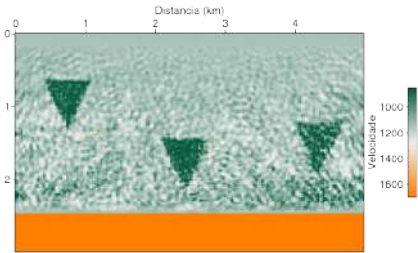
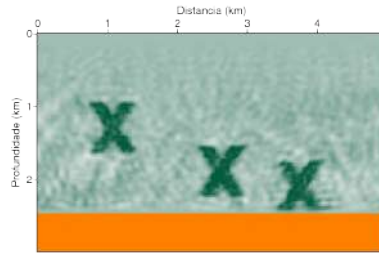
(b)



$V_z$

(c)

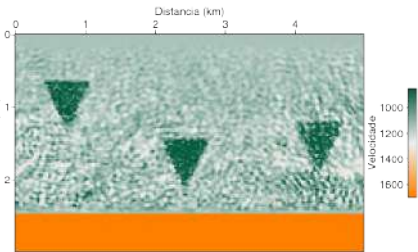
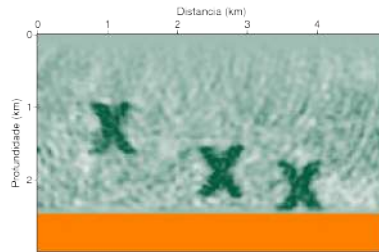
(d)



P e  $V_z$

(e)

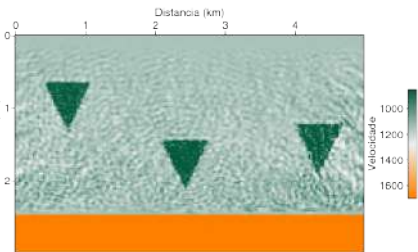
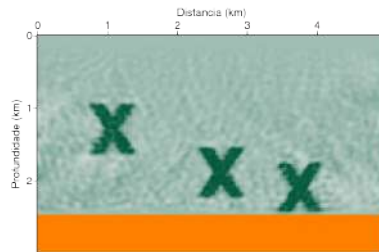
(f)



$V_x$

(g)

(h)



P,  $V_z$ ,  $V_x$

(i)

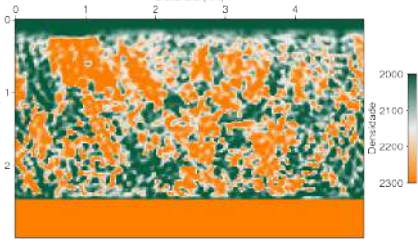
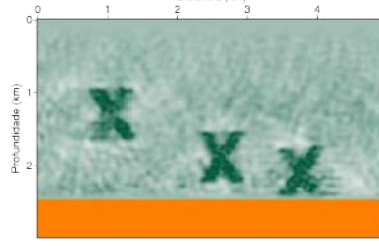
(j)

Figura 6.3.4: Resultados da inversão simultânea de  $v_p$  (coluna 1) e  $v_s$  (coluna 2) utilizando como dado de entrada a modelagem 4, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente  $P$ , em (c) e (d) componente  $V_z$ , em (e) e (f) componentes  $P$  e  $V_z$ , em (g) e (h) componente  $V_x$  e em (i) e (j) as três componentes  $P$ ,  $V_z$  e  $V_x$ .

Pert.

$v_p, \rho$

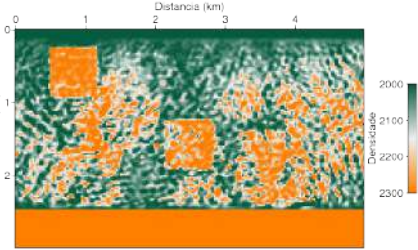
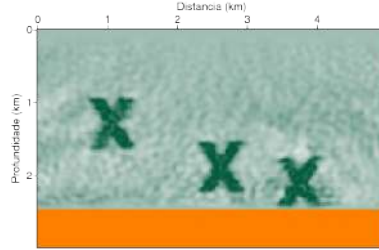
$v_p, \rho$



P

(a)

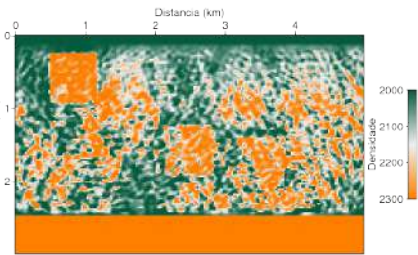
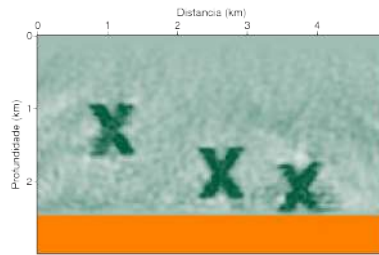
(b)



$V_z$

(c)

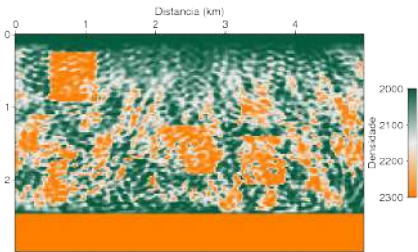
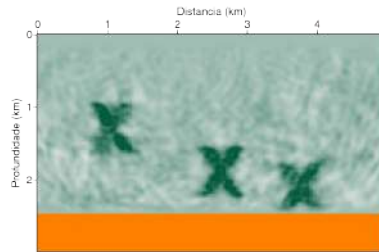
(d)



P e  $V_z$

(e)

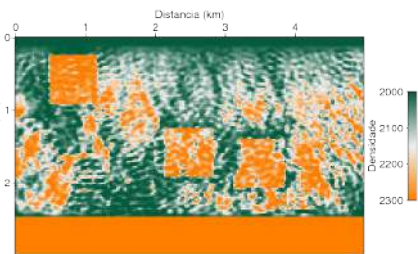
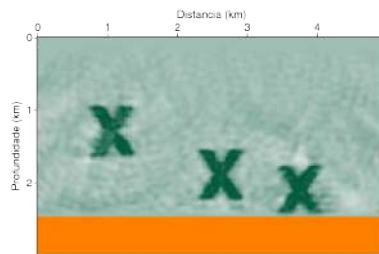
(f)



$V_x$

(g)

(h)



P,  $V_z$ ,  $V_x$

(i)

(j)

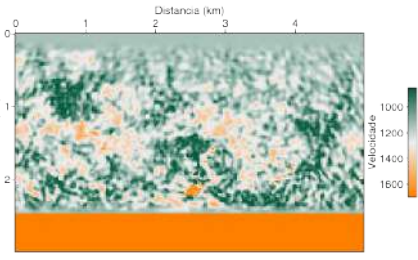
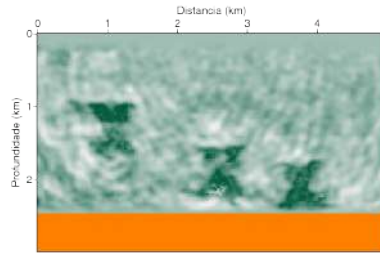
Figura 6.3.5: Resultados da inversão simultânea de  $v_p$  (coluna 1) e  $\rho$  (coluna 2) utilizando como dado de entrada a modelagem 5, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente  $P$ , em (c) e (d) componente  $V_z$ , em (e) e (f) componentes  $P$  e  $V_z$ , em (g) e (h) componente  $V_x$  e em (i) e (j) as três componentes  $P$ ,  $V_z$  e  $V_x$ .



Pert.

$v_p, v_s, \rho$

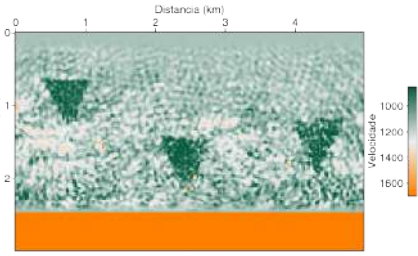
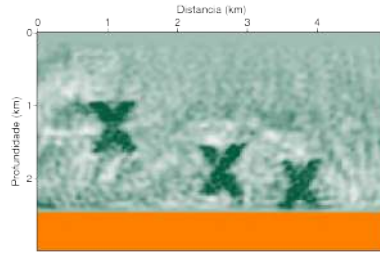
$v_p, v_s, \rho$



P

(a)

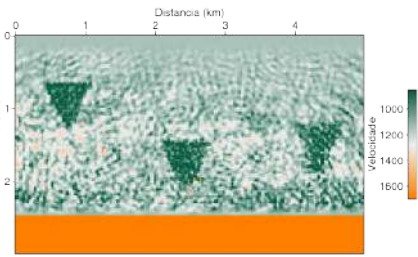
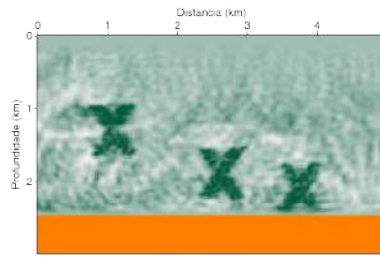
(b)



$V_z$

(c)

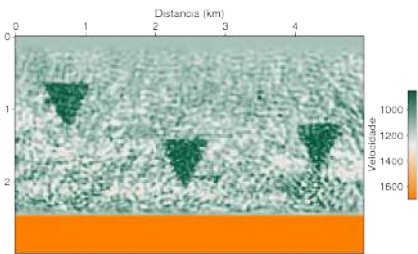
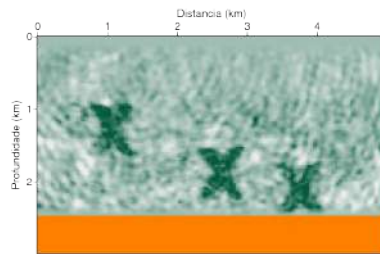
(d)



P e  $V_z$

(e)

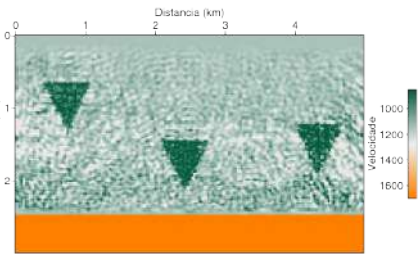
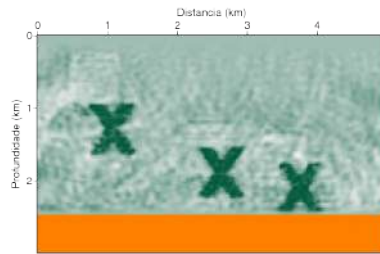
(f)



$V_x$

(g)

(h)



P,  $V_z$ ,  $V_x$

(i)

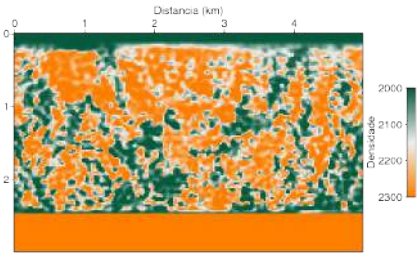
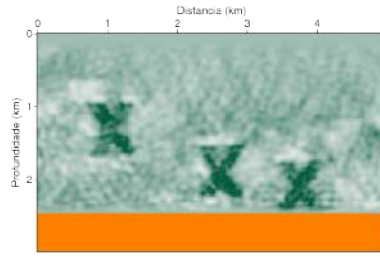
(j)

Figura 6.3.6: Resultados da inversão simultânea de  $v_p$  e  $v_s$  utilizando como dado de entrada a modelagem 6, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente  $P$ , em (c) e (d) componente  $V_z$ , em (e) e (f) componentes  $P$  e  $V_z$ , em (g) e (h) componente  $V_x$  e em (i) e (j) as três componentes  $P$ ,  $V_z$  e  $V_x$ .

Pert.

$v_p, v_s, \rho$

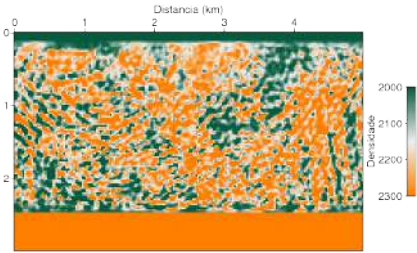
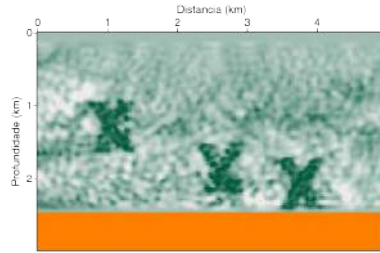
$v_p, v_s, \rho$



P

(a)

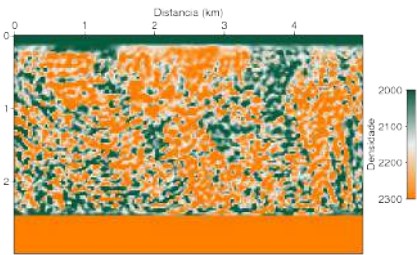
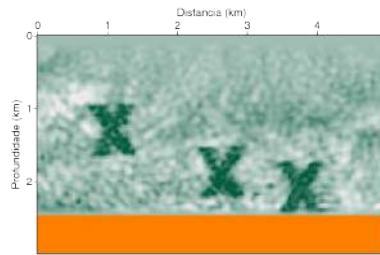
(b)



$V_z$

(c)

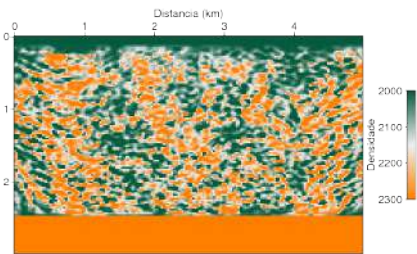
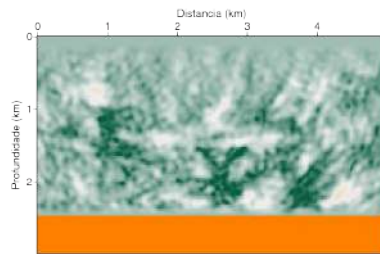
(d)



P e  $V_z$

(e)

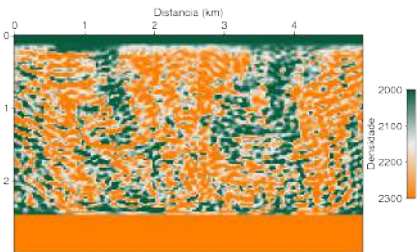
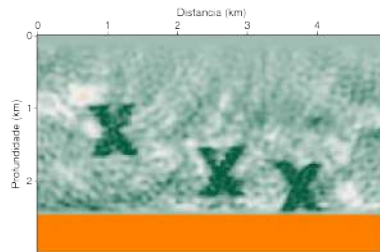
(f)



$V_x$

(g)

(h)



P,  $V_z$ ,  $V_x$

(i)

(j)

Figura 6.3.7: Resultados da inversão simultânea de  $v_p$  e  $\rho$  utilizando como dado de entrada a modelagem 6, conforme a Tabela 6.1: em (a) e (b) a componente  $P$ , em (c) e (d) componente  $V_z$ , em (e) e (f) componentes  $P$  e  $V_z$ , em (g) e (h) componente  $V_x$  e em (i) e (j) as três componentes  $P$ ,  $V_z$  e  $V_x$ .

### 6.3.3 Categoria 3: inversão simultânea para três parâmetros

Os resultados de inversão para três parâmetros estão apresentados na Figura 6.3.8. Observa-se que o caso utilizando as três componentes foi o mais aproximado dos modelos verdadeiros e não há evidência de interferência entre parâmetros. Estes últimos resultados são mais próximos do que poderia ser feito com um dado real. Mesmo nesse caso, é evidente a dificuldade da reconstrução do parâmetro de densidade. Observa-se que essa degradação aumenta proporcionalmente com a profundidade e, possivelmente devido ao registro de ângulos de espalhamentos menores.



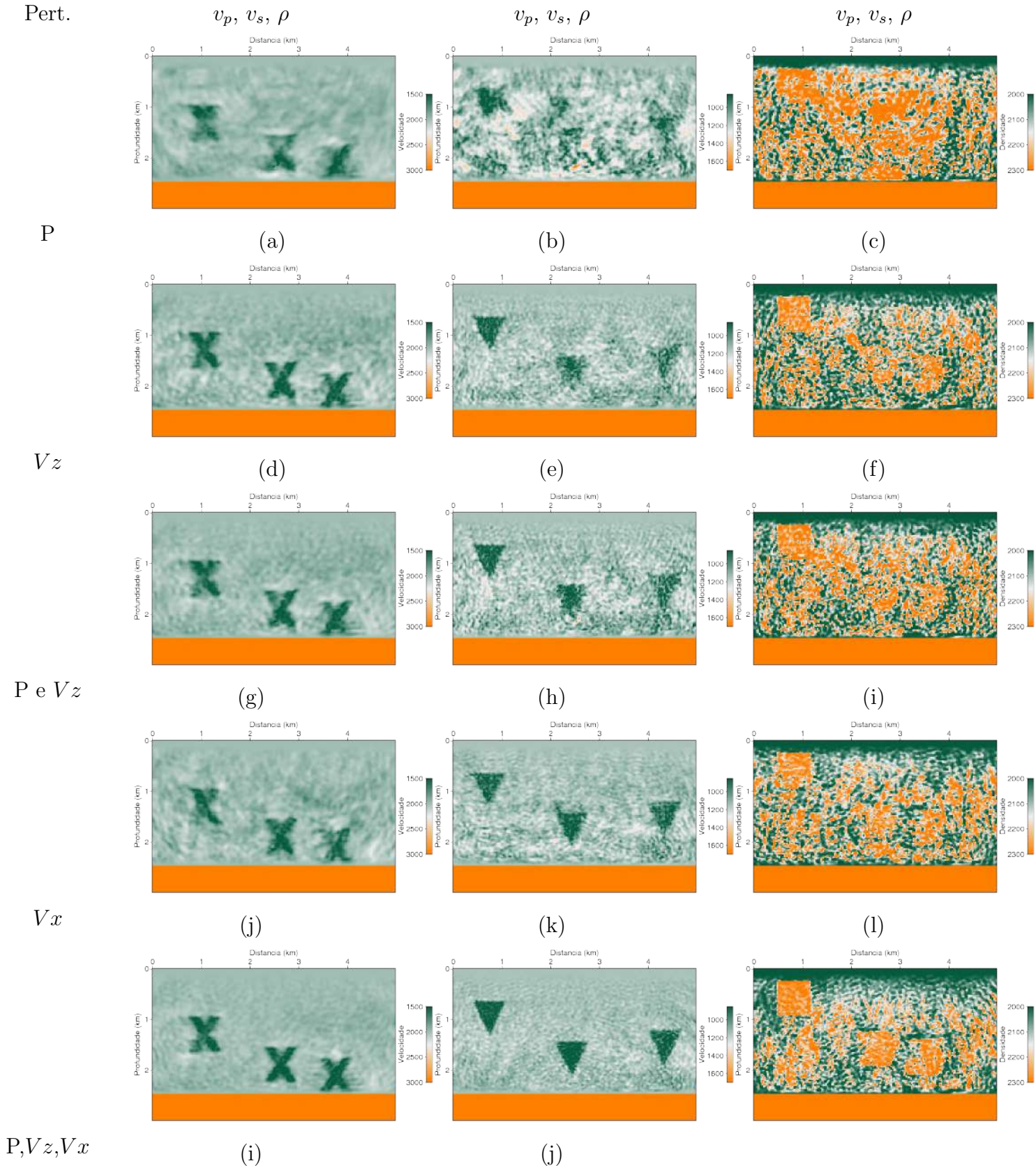


Figura 6.3.8: Resultados da inversão simultânea de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  utilizando dados gerados da modelagem 6, conforme a Tabela 6.1, separados por componentes: em (a)-(c) componente  $P$ , em (d)-(f) utilizando dado da componente  $V_z$ , em (g)-(i) componentes  $P$  e  $V_z$ , em (j)-(l) componente  $V_x$  e em (m)-(o) as três componentes  $P$ ,  $V_z$  e  $V_x$ .

### 6.3.4 Erro relativo

Esta seção ilustra a análise utilizando o erro relativo (RMSD, do inglês *root-mean-square error*) utilizado para medir as diferenças entre os modelos resultantes das 75 inversões e os respectivos modelos verdadeiros. O erro relativo é dado por:

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\bar{p}_i - p_i}{\bar{p}_i} \right)^2}, \quad (6.3.1)$$

onde  $p$  é o modelo de parâmetro verdadeiro e  $p_i$  os modelos de parâmetros resultantes da inversão.

A Figura 6.3.9 ilustra os erros relativos entre os resultados das 75 inversões e os respectivos modelos verdadeiros de cada parâmetro. A abscissa indica o número da inversão de acordo com as Tabelas E.1-E.15. Os valores nulos indicam que o parâmetro não foi considerado para ser invertido.

Os menores erros foram os obtidos das inversões de somente um parâmetro e com dado de entrada proveniente da modelagem com apenas o respectivo parâmetro de perturbação. Este padrão pode ser visto nos três gráficos: para o caso de  $v_p$  nas inversões 1-5 (conforme a Tabela E.1), para o caso de  $v_s$  nas inversões 6-10 (Tabela E.2) e para o caso de  $\rho$  nas inversões de 11-15 (Tabela E.3). No entanto, estes não são casos realistas, pois foi utilizado apenas um modelo de perturbação para geração do dado observado. Analisando os outros casos de inversões, em que há mais de um modelo de perturbação, evidencia que o FWI se torna altamente não linear quando se tenta reconstruir mais de um parâmetro [11].

A Figura 6.3.9a ilustra os erros relativos de  $v_p$ . Observa-se que entre a primeira e a segunda inversão, que utilizam respectivamente as componentes  $P$  e  $Vz$ , a última obteve um menor erro relativo. O uso destas duas componentes simultaneamente (conforme definido na inversão 3) foi similar ao uso de apenas  $Vz$ . No caso do uso de  $Vx$  (inversão 4), este possui o maior erro relativo, portanto, o que mais se distancia do modelo verdadeiro. O resultado mais ajustado ao modelo verdadeiro foi com o uso das três componentes ( $P$ ,  $Vz$  e  $Vx$ ) combinadas (inversão 5).

As inversões apresentadas nas Tabelas E.4 e E.10 indicam inversões apenas para  $v_p$ . Na primeira há, além de  $v_p$ , a perturbação de  $v_s$  (modelagem 2) e na segunda é incluída também a perturbação de  $\rho$  (modelagem 6). Observa-se que os menores erros relativos foram os que utilizaram como dado de entrada, apenas a componente  $P$ .

Nas inversões de apenas  $v_p$  indicadas na Tabela E.7, em que se utilizam dados resultantes da modelagem 3, ou seja, com perturbação de  $v_p$  e  $\rho$ , mostram que o resultado menos acurado é o com uso de apenas  $P$  (inversão 31) e o resultado mais preciso, aquele que utiliza as três componentes (inversão 35). O resultado utilizando  $Vx$  (inversão 34) teve o maior erro relativo.

Comparando os dois últimos parágrafos, pode-se concluir que se no meio existe a perturbação de  $v_s$  (com ou sem perturbação de densidade), a inversão acústica, ou seja, uma inversão considerando direção de atualização apenas de  $v_p$ , o dado do hidrofone seria o suficiente para se obter o melhor resultado. Com isso, em aplicações reais, onde o dado real é obtido de perturbações de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ , além dos parâmetros anisotrópicos, o FWI em sua versão acústica, fornece melhor resultado possível utilizando a componente de pressão.

Nas inversões de 26-30 (Tabela E.6), onde foi realizada inversão simultânea de  $v_p$  e  $v_s$ , pode-se comparar estes resultados com às inversões 16-20, que utilizaram os dados provenientes da mesma modelagem. Observa-se que quando se inverteu simultaneamente, os erros relativos foram menores do que quando se inverteu apenas para  $v_p$ . Além disso, verifica-se que o menor erro relativo foi o caso em que se utilizou as três componentes e não apenas  $P$ , como ocorreu na inversão acústica 16.

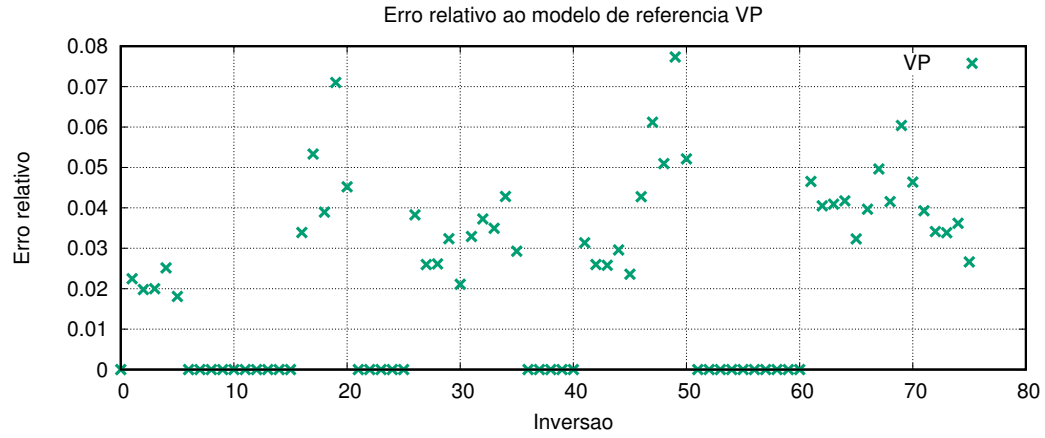
Nas inversões 41-45 foi realizada inversão simultânea de  $v_p$  e  $\rho$ . Verifica-se que quando compara-se às inversões 31-35 (inversão de somente de  $v_p$ ), que utilizaram os dados da modelagem 3, os valores dos erros relativos foram menores na inversão de multiparâmetros do que na monoparâmetro. O resultado utilizando apenas a componente de pressão obteve maior erro relativo na inversão simultânea, enquanto que na inversão monoparâmetro de  $v_p$  foi a segunda menor. Observa-se que em ambos casos, os valores dos erros relativos utilizando esta componente permaneceram próximos de 0,03, similaridade que pode ser observada nas Figuras E.2.1g e 6.3.5a.

Examinando os valores dos erros relativos no gráfico de  $v_s$ , apresentado na Figura 6.3.9b, observa-se que os erros relativos, quando se usa somente a componente  $P$ , são os mais altos. Isso ocorre, pois o sensor de pressão não registra sinal de onda cisalhante. Os casos em que a inversão foi feita apenas para  $v_s$ , o menor erro relativo foi o que utilizou exclusivamente a componente  $Vx$ . Isso pode ser explicado devido a esta componente ser mais sensível a onda-S para esta geometria de aquisição. Nos demais casos, os menores erros relativos foram os que utilizaram os dados das três componentes. Conclui-se que quando houver necessidade de se inverter apenas para  $v_s$ , deve-se priorizar o uso da componente horizontal.

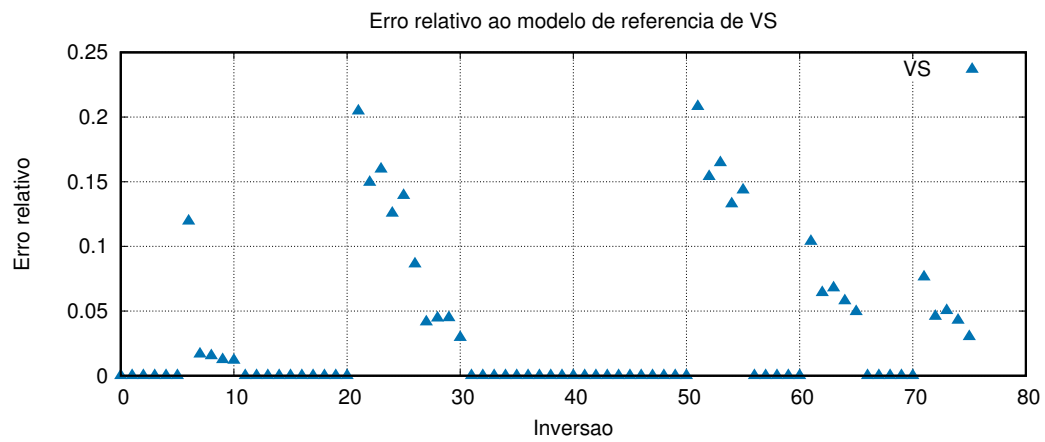
O caso de  $\rho$  (Figura 6.3.9c) segue discussão semelhante dos parâmetros  $v_p$  e  $v_s$  quando se utiliza todas as componentes. Nota-se que o erro relativo de  $\rho$  é, em geral, menor se comparado aos de  $v_p$  e  $v_s$ . Isso se deve ao fato de que os valores de perturbação de  $\rho$  estão limitados a apenas 300 kg/m<sup>3</sup> de diferença, enquanto  $v_s$  a

850 m/s e  $v_p$  a 1500 m/s.

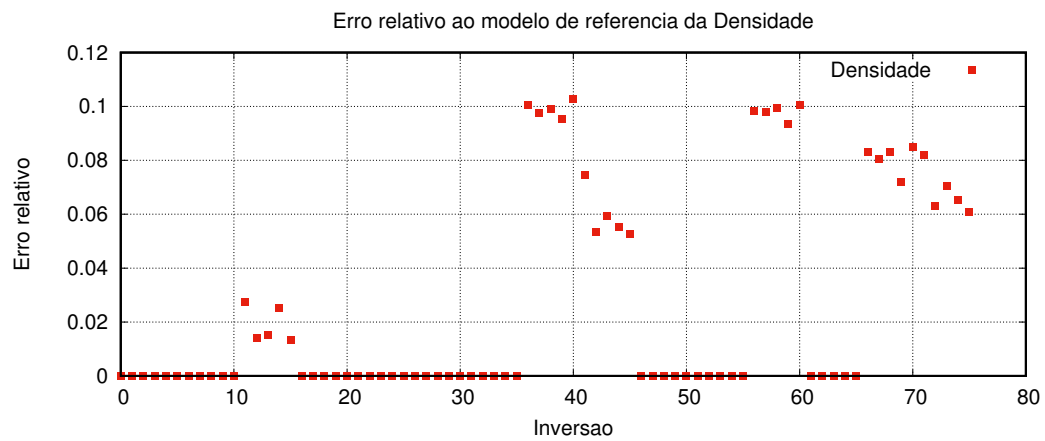
As inversões de 61-75 utilizaram dado da modelagem 6, que é o caso da modelagem mais próximo de um dado real realizada neste trabalho. De 61-65 as inversões foram simultâneas para  $v_p$  e  $v_s$ , de 66-70 para  $v_p$  e  $\rho$  e de 71-75 para os três parâmetros,  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ . Comparando estas inversões citadas, observa-se nos três gráficos da Figura 6.3.9 que os menores erros relativos foram obtidos através das inversões simultâneas dos três parâmetros utilizando as três componentes como dado elástico de entrada.



(a)



(b)



(c)

Figura 6.3.9: Erro relativo para modelos de parâmetros resultantes de cada dos 75 casos de inversão. Em (a) modelos resultantes de  $v_p$ , em (b) modelos resultantes de  $v_s$  e em (c) modelos resultantes de  $\rho$ .



## 6.4 Conclusão

Conclui-se que a escolha da componente deve ser feita dependendo se o algoritmo de inversão FWI for monoparâmetro para velocidade compressional acústica ou multiparâmetro elástico. No primeiro caso, a recomendação é utilizar o dado da componente hidrofone e, no segundo, a utilização de todas as componentes registradas. Deve-se levar em consideração que a inversão simultânea de multiparâmetros minimiza efeitos de ambiguidade e tem melhor convergência dos modelos para uma solução aceitável, comparado à inversão monoparâmetro.

# Capítulo 7

## Conclusões

Esta tese propõe uma nova metodologia para obtenção das direções de atualizações de multiparâmetros elásticos para o método de inversão FWI pré condicionadas utilizando as propriedades de reparametrização da Hessiana aproximada, com dependência na diagonal da pseudo-Hessiana. Desta forma assegura-se que as direções de atualizações de parâmetros sejam adequadamente escaladas, além de manter as unidades apropriadas do problema.

A metodologia proposta foi realizada através de um levantamento de estudos relacionados ao problema de inversão utilizando a equação completa da onda para os casos 2D isotrópico acústico e elástico nos domínios espaço-tempo e espaço-frequência. No primeiro estudo, apresentado no Capítulo 3, foram comparados diferentes métodos de otimização. Os resultados foram obtidos realizando o método FWI acústico no domínio da frequência. Pode ser observado no gráfico da função objetivo (Figura 3.7.5), que o método quasi-Newton faz com que o modelo convirja mais rapidamente para valores mínimos da função objetivo, comparado aos outros métodos testados (gradiente-descendente e duas aproximações de gradiente-conjugados). Este resultado reforçou a ideia, já prevista da literatura especializada [47], de que uma aproximação na matriz Hessiana para FWI pode ser mais adequada para escalar apropriadamente a direção de atualização.

O segundo resultado a ser destacado está apresentado no Capítulo 4. Neste, foi realizada uma comparação entre os resultados da inversão acústica (no domínio do tempo) para dois casos de dados sintéticos de entrada: no caso 1 o dado foi obtido da modelagem acústica e no caso 2, proveniente da modelagem elástica. Neste último, a modelagem foi realizada de posse dos modelos de parâmetros  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ . Pode-se observar na Figura 4.2.5 que o resultado da inversão com o dado acústico ficou mais aproximado do modelo verdadeiro do que o resultado com o dado da modelagem elástica. No entanto, o dado elástico é mais próximo da realidade do que o dado acústico. Este resultado reforçou a necessidade de se encontrar uma estratégia de se inverter considerando mais parâmetros além do  $v_p$ .

A partir das conclusões acima, propôs-se uma nova metodologia para assegurar uma direção de atualização melhor escalada para o método de inversão FWI de multiparâmetros considerando a matriz Hessiana, pois algoritmos que utilizam as propriedades da matriz Hessiana são menos sensíveis à parametrização, portanto, podem lidar com formulações de problemas de inversão de multiparâmetros de uma forma mais robusta. Conforme pode ser verificado no Capítulo 5, foi deduzida a reparametrização de propriedades do gradiente e da Hessiana, para os casos isotrópico 2D acústico e elástico. Também é importante ressaltar que o método proposto mantém as unidades físicas das direções de atualização de cada parâmetro, diferentemente da direção de atualização convencional.

A análise foi iniciada para o caso acústico, onde avaliou-se os modelos resultantes considerando duas parametrizações distintas: a velocidade compressional  $v_p$  e a vagarosidade ao quadrado  $\sigma = 1/v_p^2$  (seção 5.4). Observou-se que no resultado utilizando a direção de atualização parametrizada com relação ao  $v_p$  o modelo não foi adequadamente atualizado, principalmente na região mais profunda do mesmo, enquanto que o resultado parametrizado com relação à  $\sigma$  resultou num modelo mais próximo do verdadeiro. Esta comparação pode ser verificada na Figura 5.4.2. Para confrontar este resultado, implementou-se a direção de atualização calculada com dependência na pseudo-Hessiana, donde foi obtido resultado consideravelmente semelhante ao que utilizou a parametrização na vagarosidade.

No caso elástico, os resultados utilizando as direções de atualizações pelo método proposto, obtidos através do pré condicionamento pelas transformações do inverso da Hessiana aproximada, fornecem modelos resultantes mais próximos do modelo verdadeiro como um todo e mais rápida taxa de convergência, sem aumento de custo computacional para cada iteração comparados aos resultados que utilizam as direções de atualizações convencionais (empregando-se otimizações SD e l-BFGS). Futuramente pode-se implementar numericamente o caso elástico isotrópico 3D, já calculado neste trabalho no Apêndice D. Apenas por questões de custo computacional e tempo não foi implementado.

Por fim, no Capítulo 6, realizou-se uma análise de FWI com dados de multi-componentes 3C/2D (hidrofone, componentes vertical e horizontal do geofone). O propósito foi avaliar os efeitos nos modelos resultantes das inversões dependendo da combinação dos dados de entrada. Conclui-se que, ao se utilizar dados de entrada elásticos para o FWI (dado sintético mais realista que o acústico) a componente hidrofone é a recomendada se a inversão for monoparâmetro para velocidade compressional acústica, e a utilização de todas as componentes registradas, quando a inversão for multiparâmetro elástica. Além disso, observa-se que os modelos obtidos são mais acurados e efeitos de ambiguidade (*cross-talk*) são atenuados quando se realiza a inversão simultânea de todos os parâmetros considerados na geração do dado

observado, resultando em modelos de multiparâmetros mais próximos dos almejados.

Contudo, unindo as investigações realizadas durante este doutorado, conclui-se que, para a estratégia ótima de inversão utilizando FWI, recomenda-se a aplicação de métodos de otimização locais com aproximação da Hessiana, por serem mais eficientes, como o caso do l-BFGS, ilustrado no Capítulo 3; considerar inversão de multiparâmetros utilizando direções de atualização adequadamente escaladas (conforme apresentado no Capítulo 5) e fazer uso de dados de multicomponentes, como visto no Capítulo 6. Desta forma, pode-se alcançar um resultado mais preciso.

Em escala industrial, a inversão sísmica com FWI elástico ainda é bastante desafiadora, devido ao seu alto custo computacional. No entanto, uma vez que todos os modos de onda (cisalhantes, transmitidas, reverberações, reflexões, múltiplas) são levadas em consideração na inversão, esta técnica se torna bastante promissora para estimativa de propriedades elásticas da rocha, que são úteis na caracterização de litologia e fluidos de reservatórios.

Como propostas futuras, além da implementação para o caso 3D (calculado como apresentado no Apêndice D), pode-se estender esta formulação de direções de atualização para os parâmetros anisotrópicos e para o fator de absorção  $Q$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] ABUBAKAR, A., LI, M., LIN, Y., et al., 2012, “Compressed implicit Jacobian scheme for elastic full-waveform inversion”, *Geophysical Journal International*, , n. 189, pp. 1626–1634.
- [2] AJO-FRANKLIN, J. B., 2005, “Frequency-Domain Modeling Techniques for the Scalar Wave Equation: An Introduction”, *Notes*.
- [3] BAI, J., YINGST, D., BLOOR, R., et al., 2014, “Viscoacoustic waveform inversion of velocity structures in the time domain”, *GEOPHYSICS*, v. 79, n. 3, pp. R103–R119. doi: 10.1190/geo2013-0030.1.
- [4] BEN-HADJ-ALI, H., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2008, “Velocity model-building by 3D frequency-domain, full-waveform inversion of wide-aperture seismic data”, *Geophysics*, v. 73, n. 5 (SEPTEMBER-OCTOBER), pp. VE101–VE117.
- [5] BERENGER, J. P., 1994, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *Journal Computational Physics*, v. 114, n. 2, pp. 185–200.
- [6] BIRGIN, E. G., MARTÍNEZ, J. M., 2014, *Practical Augmented Lagrangian Methods for Constrained Optimization*. SIAM.
- [7] BOONYASIRIWAT, C., VALASEK, P., ROUTH, P., et al., 2009, “An efficient multiscale method for time-domain waveform tomography”, *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCC59–WCC68.
- [8] BOURGEOIS, A., BOURGET, M., LAILLY, P., et al., 1991, “Marmousi, model and data: Eur. Assoc. Expl. Geophys., in Versteeg, R., and Grau, G., Eds., The Marmousi experience”, *Proceedings of the 1990 EAGE workshop on Practical Aspects of Seismic Data Inversion*, pp. 5–16.
- [9] BOYD, S., VANDENBERGUE, L., 2004, *Convex Optimization*. Cambridge University Press.

- [10] BROSSIER, R., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2009, “Two-dimensional seismic imaging of the Valhall model from synthetic OBC data by frequency-domain elastic full-waveform inversion”. In: *SEG Houston 2009 International Exposition and Annual Meeting*, .
- [11] BROSSIER, R., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2009, “Seismic imaging of complex onshore structures by 2D elastic frequency-domain full-waveform inversion”, *Geophysics*, v. 74, n. 6, pp. WCC105–WCC118.
- [12] BUNKS, C., 1995, “Multiscale seismic waveform inversion”, *Geophysics*, v. 60, n. 5, pp. 1457.
- [13] BUTZER, S., KURZMANN, A., BOHLEN, T., 2013, “3D elastic full-waveform inversion of small-scale heterogeneities in transmission geometry”, *Geophysical Prospecting*, v. 61, pp. 1238–1251.
- [14] CERJAN, C., KOSLOFF, D., KOSLOFF, R., et al., 1985, “A Nonreflecting Boundary Condition For Discrete Acoustic and Elastic Wave Equation”, *Geophysics*, v. 50, pp. 705–708.
- [15] CHAVENT, G., 2010, *Nonlinear least squares for inverse problems*. Springer.
- [16] DA SILVA, D. L. F., 2017, *Influência dos métodos de otimização e da borda de absorção na Inversão do campo de onda acústico no domínio da frequência*. Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense.
- [17] DA SILVA, J. J., 2011, *Introdução ao Método Sísmico. Módulo: Modelagem Computacional em Geofísica (CPC767)*. COPPE/UFRJ/LAB2M/LAMCE, Janeiro.
- [18] DUARTE, F. S., 2012, *Modelagem Acústica no Domínio da Frequência Através do Emprego de Diferentes Esquemas de Diferenças Finitas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- [19] DUPUY, B., GARAMBOIS, S., ASNAASHARI, A., et al., 2016, “Estimation of rock physics properties from seismic attributes - Part 2: Applications”, *Geophysics*, v. 81, n. 4 (July-August), pp. M55–M69.
- [20] DUPUY, B., GARAMBOIS, S., VIRIEUX, J., 2016, “Estimation of rock physics properties from seismic attributes - Part 1: Strategy and sensitivity analysis”, *Geophysics*, v. 81, n. 4 (May-June), pp. M35–M53.
- [21] FICHTNER, A., 2011, *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. Springer.

- [22] FLETCHER, R., 1980, *Practical Methods of Optimization, Volume 1: Unconstrained Optimization*. John Wiley & Sons.
- [23] FLETCHER, R., REEVES, C. M., 1964, “Function minimization by conjugate gradients”, *Computer Journal*, v. 7, pp. 149–154.
- [24] GUIMARÃES, M. A. G., 2012, *Curso de Aquisição Sísmica Marítima*.
- [25] HAFFINGER, P. R., 2013, *Seismic Broadband Full Waveform Inversion by shot/receiver refocusing*. Tese de Doutorado, Technische Universiteit Delft, Nederland, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Zwitterland, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, Duitsland, geboren te Trier, Duitsland.
- [26] HOLBERG, O., 1987, “Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for Numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena”, *Geophysica Prospecting*, v. 35, pp. 629–655.
- [27] HUGHES, T. J., MARSDEN, J. E., 1978, “Classical elastodynamics as a linear symmetric hyperbolic system”, *Journal of Elasticity*, v. 8, pp. 97–110.
- [28] HUSTEDT, B., OPERTO, S., VIRIEUX, J., 2004, “Mixed-grid and staggered-grid finite difference methods for frequency-domain acoustic wave modeling”, *Geophysical Journal International*, v. 157, n. 3, pp. 1269–1296.
- [29] IKELLE, L. T., AMUNDSEN, L., 2005, *Introduction to Petroleum Seismology*. Society of Exploration Geophysics.
- [30] INNANEN, K. A., 2014, “Seismic AVO and the inverse Hessian in precritical reflection full waveform inversion”, *Geophysical Journal International (Geophys. J. Int.)*, v. 2, n. 199 (November), pp. 717–734.
- [31] JANG, U., MIN, D.-J., SHIN, C., 2009, “Comparison of scaling methods for waveform inversion”, *Geophysical Prospecting*, v. 57, n. 1, pp. 49–59. ISSN: 1365-2478. doi: 10.1111/j.1365-2478.2008.00739.x.
- [32] JO, C., SHIN, C., SUH, J., 1996, “An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space 2-D scalar wave extrapolator”, *Geophysics*, v. 61, n. 2, pp. 529–537.
- [33] KELLY, K. R., WARD, R. W., TREITEL, S., et al., 1976, “Synthetic Seismograms: A Finite-Difference Approach”, *Geophysics*, v. 41, n. 1 (February), pp. 2–27.

- [34] KOLB, P., COLLINO, F., LAILLY, P., 1986, “Pre-Stack inversion of a 1-D medium”, *Proc. IEEE*, v. 74, pp. 498–508.
- [35] KÖHN, D., 2011, *Time Domain 2D Elastic Full Waveform Tomography*. Tese de Mestrado, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, März.
- [36] KÖHN, D., DE NIL, D., KURZMANN, A., et al., 2012, “On the influence of model parametrization in elastic full waveform tomography”, *Geophysical Journal International*, v. 191, n. 1, pp. 325–345. ISSN: 1365-246X. doi: 10.1111/j.1365-246X.2012.05633.x.
- [37] LAILLY, P., 1983, “The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations”. In: Bednar, J. B., Redner, R., Robinson, E., et al. (Eds.), *Conference on Inverse Scattering: Theory and Applications*, Philadelphia, PA. Soc. Industr. appl. Math.
- [38] LEVANDER, A., 1988, “4th-order finite-difference P-SV seismograms”, *Geophysics*, v. 76, n. 5, pp. WB3–WB20.
- [39] LINES, L. R., SLAWINSKI, R., BORDING, R. P., 1998, “A recipe for stability of finite-difference wave equation computation”, *CREWES Research Report*, v. 10, pp. 17–1–17–6.
- [40] MA, Y., 2010, *Full waveform inversion with image-guided gradient*. Master of science thesis, Center for Wave Phenomena Colorado School of Mines, May.
- [41] MARTIN, G. S., MARFURT, K. J., LARSEN, S., 2002, “Marmousi-2: An Updated Model for the Investigation of AVO in Structurally Complex Area”, *Society of Exploration Geophysics*.
- [42] MARTIN, G. S., MARFURT, K. J., LARSEN, S., 2002, “Marmousi-2: An Updated Model for the Investigation of AVO in Structurally Complex Area”, *Society of Exploration Geophysics*.
- [43] MAVKO, G., MUKERJI, T., J. D., 2009, *The Rock Physics Handbook: Tools for Seismic Analysis of Porous Media*. Cambridge University Press.
- [44] MUFTI, I. R., 1990, “Large-Scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance”, *Geophysics*, v. 55, n. 9, pp. 1166–1182.
- [45] MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2015, “Acoustic multi-parameter FWI for the reconstruction of P-wave velocity, density and



- attenuation: preconditioned truncated Newton approach”, *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2015*, pp. 1198–1203. doi: 10.1190/segam2015-5875643.1.
- [46] MÉTIVIER, L., BROSSIER, R., 2016, “The SEISCOPE optimization toolbox: A large-scale nonlinear optimization library based on reverse communication”, *GEOPHYSICS*, v. 81, n. 2, pp. F1–F15. doi: 10.1190/geo2015-0031.1.
- [47] NOCEDAL, J., WRIGHT, S. J., 2006, *Numerical Optimization*. Springer.
- [48] OH, J.-W., ALKHALIFAH, T., 2016, “Elastic orthorhombic anisotropic parameter inversion: An analysis of parameterization”, *GEOPHYSICS*, v. 81, n. 6, pp. C279–C293. doi: 10.1190/geo2015-0656.1.
- [49] OPERTO, S., GHOLAMI, Y., PRIEUX, V., et al., 2013, “A guided tour of multiparameter full-waveform inversion with multicomponent data: From theory to practice”, *The Leading Edge*, v. 32, n. 9, pp. 1040–1054. doi: 10.1190/tle32091040.1.
- [50] OSTRANDER, W. J., 1984, “Plane-Wave Reflection Coefficients for Gas Sand at Nonnormal Angle Incidence”, *Geophysics*, v. 49, pp. 1637–1648.
- [51] PLESSIX, R.-E., 2006, “A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications”, *Geophys. J. Int.*, , n. 167, pp. 495–503. doi: 10.1111/j.1365-246X.2006.02978.x.
- [52] PLESSIX, R.-E., MULDER, W. A., 2004, “Frequency-domain finite-difference amplitude-preserving migration”, *Geophys. J. Int.*, v. 157, pp. 975–987.
- [53] POLAK, E., RIBIÈRE, G., 1969, “Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées”, *Revue Française d’Informatique et de Recherche Opérationnelle*, v. 16, pp. 35–43.
- [54] PRATT, R. G., 1999, “Seismic waveform inversion in the frequency domain, Part 1: Theory and verification in a physical scale model”, *Geophysics*, v. 63, n. 3, pp. 888.
- [55] PRATT, R. G., SHIN, C., HICKS, G. J., 1998, “Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion”, *Geophys. J. Int.*, v. 133, pp. 341–362.
- [56] PRIEUX, V., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2013, “Multiparameter full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom-cable data from the

- Valhall field. Part 1: imaging compressional wave speed, density and attenuation”, *Geophysical Journal International*, v. 194, n. 3, pp. 1640–1664.
- [57] PRIEUX, V., BROSSIER, R., OPERTO, S., et al., 2013, “Multiparameter full waveform inversion of multicomponent ocean-bottom-cable data from the Valhall field. Part 2: imaging compressive-wave and shear-wave velocities”, *Geophysical Journal International*, v. 194, n. 3, pp. 1665–1681.
- [58] PRZEBINDOWSKA, A., 2013, *Acoustic Full Waveform Inversion of Marine Reflection Seismic Data*. Tese de Doutorado, Karlsruher Instituts für Technologie.
- [59] RATCLIFFE, M. W. W., NANGOO, T., MORGAN, J., et al., 2013, “Anisotropic 3D full-waveform Inversion”, *Geophysics*, v. 78 (March-April), pp. R59–R80.
- [60] RAVAUT, C., OPERTO, S., VIRIEUX, J., et al., 2004, “Multi-scale imaging of complex structures from multi-fold wide-aperture seismic data by frequency-domain full-wavefield inversion: Application to a trust beld”, *Geophysical Journal International*, v. 159, pp. 1032–1056.
- [61] REYNOLDS, A. C., 1978, “Boundary Conditions For the Numerical Solution of Wave Propagation Problems”, *Geophysics*, v. 43, pp. 1099–1110.
- [62] SAVA, P., BIONDI, B., 2004a, “Wave-equation migration velocity analysis. I. Theory”, *Geophysical Prospecting*, v. 52, n. 6, pp. 593–606.
- [63] SEARS, T., SINGH, S. C., BARTON, P. J., 2008, “Elastic full waveform inversion of multi-component OBC seismic data”, *Geophysics Prospecting*, v. 56, pp. 843–862.
- [64] SEN, M. K., STOFFA, P. L., 2013, *Global Optimization Methods in Geophysical Inversion*. Cambridge University Press.
- [65] SHIN, C., JANG, S., MIN, D.-J., 2001, “Improved amplitude preservation for prestack depth migration by inverse scattering theory”, *Geophysical Prospecting*, v. 49, pp. 592–606.
- [66] SIRGUE, L., 2003, *Frequency-domain waveform inversion of large offset seismic data*. Tese de Doutorado, École Normale Supérieure de Paris.
- [67] SIRGUE, L., ALBERTIN, U., 2008, “3D frequency-domain waveform inversion using time-domain finite-difference methods”. In: *70th Annual International Conference and Exhibition, EAGE*.

- [68] SIRGUE, L., PRATT, R. G., 2004, “Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies”, *Geophysics*, v. 69, n. 1, pp. 231.
- [69] SIRGUE, L., BARKVED, O. I., GESTEL, J. P. V., et al., 2009, “3D Waveform Inversion on Valhall Wide-azimuth OBC”. In: *71 st EAGE Conference & Exhibition – Amsterdam, The Netherlands, 8 - 11 June 2009*.
- [70] SIRGUE, L., BARKVED, O., DELLINGER, J., et al., 2010, “Full waveform inversion: the next leap forward in imaging at Valhall”, *First Break*, v. 28, n. 4 (April), pp. 65–70.
- [71] SOUBARAS, R., 1996, “Ocean bottom hydrophone and geophone processing”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts*. doi: <https://doi.org/10.1190/1.1826611>.
- [72] STEKL, I., 1997, *Frequency domain seismic forward modelling: a tool for waveform inversion*. Tese de Doutorado, Department of Geology, Royal School of Mines, Imperial College London.
- [73] STORK, C., 1992, “Reflection tomography in the postmigrated domain”, *Geophysics*, v. 57, n. 5, pp. 680–692.
- [74] TARANTOLA, A., 1984, “Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation”, *Geophysics*, v. 49, pp. 1259–1903.
- [75] TARANTOLA, A., 1986, “A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data”, *Geophysics*, v. 51, pp. 1893–1903.
- [76] TARANTOLA, A., 1988, “Theoretical Background for the Inversion of Seismic Waveforms, Including Elasticity and Attenuation”, *Pure and Applied Geophysics*, v. 128, n. 1/2, pp. 365–399.
- [77] VIGH, D., JIAO, K., WATTS, D., et al., 2014, “Elastic full-waveform inversion application using multicomponent measurements of seismic data collection”, *Geophysics*, v. 79, n. 2 (March-April), pp. R63–R77. doi: [10.1190/geo2013-0055.1](https://doi.org/10.1190/geo2013-0055.1).
- [78] VIRIEUX, J., 1986, “P-SV wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method”, *Geophysics*, v. 51, n. 4, pp. 889–901.
- [79] VIRIEUX, J., OPERTO, S., 2009, “An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics”, *GEOPHYSICS*, v. 74, n. 6, pp. WCC1–WCC26.

- [80] WANG, Y., DONG, L., LIU, Y., et al., 2016, “2D frequency-domain elastic full-waveform inversion using the block-diagonal pseudo-Hessian approximation”, *GEOPHYSICS*, v. 81, n. 5, pp. R247–R259. doi: 10.1190/geo2015-0678.1.
- [81] WARNER, M., RATCLIFFE, A., NANGOO, T., et al., 2013, “Anisotropic 3D full-waveform inversion”, *GEOPHYSICS*, v. 78, n. 2, pp. R59–R80. doi: 10.1190/geo2012-0338.1.
- [82] WILCOX, C. H., 1966, “Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problems of classical physics”, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 22, pp. 37–76.
- [83] WOODWARD, M. J., 1992, “Wave-equation tomography”, *Geophysics*, v. 57, pp. 15–26.
- [84] XU, K., MCMECHAN, G. A., 2014, “2D frequency-domain elastic full-waveform inversion using time-domain modeling and a multistep-length gradient approach”, *Geophysics*, v. 79, n. 2, pp. R41–R53.
- [85] YILMAZ, C. A., CHAMBERS, R., 1984, “Migration velocity analysis by wave-field extrapolation”, *Geophysics*, v. 49, n. 10, pp. 1664–1674.
- [86] ZOEPPRITZ, K., 1919, “VIIb. On reflection and transmission of seismic waves by surfaces of discontinuity”, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, v. 66-84.

# Apêndice A

## Introdução ao Método Sísmico

A ciência Geofísica tem por objetivo obter informações das distribuições de propriedades físicas da Terra em subsuperfície. A investigação geológica direta da subsuperfície, como perfuração de poços, fornece informações localizadas, além de possuir custo operacional elevado. Buscam-se desenvolver, portanto, métodos de estimar propriedades em subsuperfície e delinear estruturas geológicas em maior escala, de forma mais rápida, mais barata e menos invasiva.

São diversos os métodos geofísicos e escalas de investigação que devem depender do propósito: como o estudo e conhecimento de toda a Terra ou a exploração de recursos naturais. Dentre estes, está um dos principais métodos geofísicos, que é o método sísmico de reflexão, utilizado amplamente na prospecção de hidrocarbonetos e outros recursos minerais.

A sísmica de reflexão é um método com base na reflexão de ondas sísmicas que utiliza princípios da sismologia para delinear estruturas geológicas e estimar propriedades em subsuperfície a fim de se mapear formações portadoras de hidrocarbonetos.

A metodologia de um levantamento sísmico (ou aquisição sísmica) consiste, basicamente, em registrar na superfície (caso convencional) o tempo de trânsito e amplitude da onda refletida nas interfaces de camadas em subsuperfície. A duração deste registro é da ordem de 4-10 segundos, desde o momento da detonação de uma fonte de energia sísmica controlada, até alcançar o receptor geralmente localizado na superfície. Esse registro é conhecido como traço sísmico. As ondas são afetadas pelo contraste de propriedades físicas da subsuperfície e carregam informações do meio que podem ser recuperadas por algum processo de inversão. Com isso, é possível estimar a estrutura que gerou a reflexão.

Estes levantamentos podem ser realizados em terra (*onshore*) ou no mar (*offshore*). Os princípios físicos são os mesmos, no entanto, existem diferenças operacionais que os distinguem. A Figura [A.0.1a](#) ilustra uma aquisição sísmica marítima.

Através da medida da resposta que chega à superfície, registrada pelo conjunto de detectores, é formada uma família de tiros (*Common Shot Gather*), como ilustra

a Figura A.0.1b. Este processo, repetido diversas vezes, obtém-se um levantamento sísmico completo. A Figura A.0.2 elucida características de eventos básicos que podem estar contidos no dado observado (registrado).

Com os dados obtidos no levantamento sísmico, são realizadas diversas etapas de processamento de sinais (processamento sísmico). Como produto final, espera-se obter informações da refletividade, bem como informações qualitativa e quantitativa sobre outros atributos. A técnica usada para produzir informações da refletividade é conhecida como Migração Sísmica.

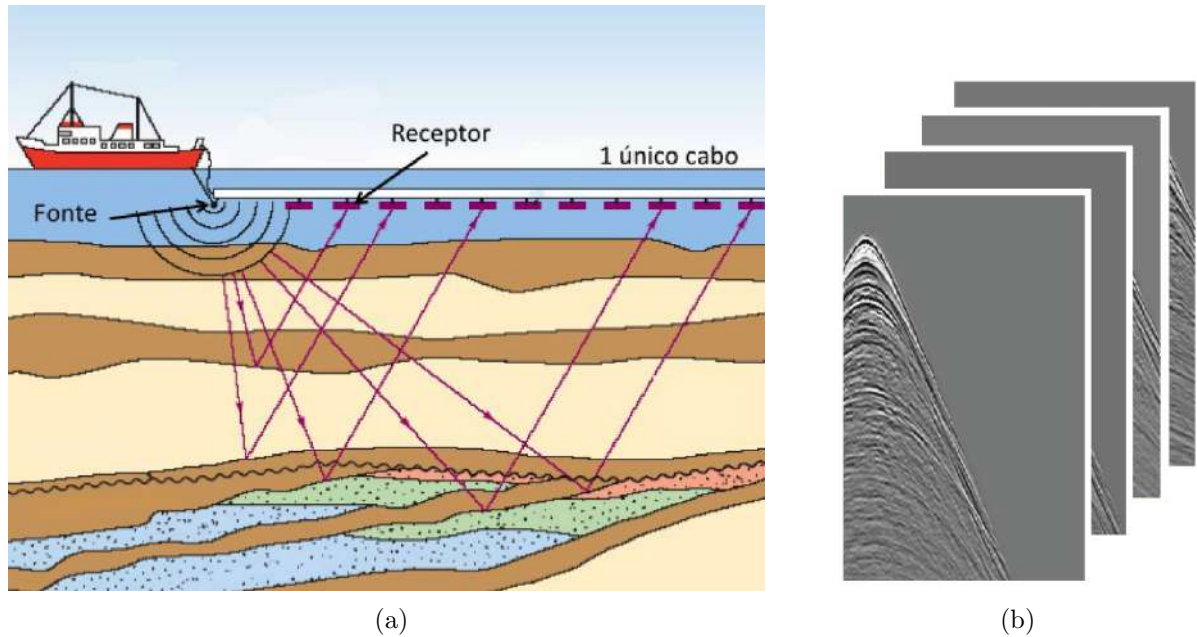


Figura A.0.1: (a) Aquisição de dados sísmicos: ondas acústicas são enviadas para dentro da subsuperfície da Terra, a partir de uma fonte sísmica. As ondas são refletidas nas interfaces entre diferentes propriedades elásticas e retornam à superfície, onde os receptores registram a energia em função do tempo de chegada. Figura obtida em GUIMARÃES [24]. (b) Diversas famílias de tiro: dados de entrada para a etapa de processamento sísmico. Figura modificada de HAFFINGER [25].

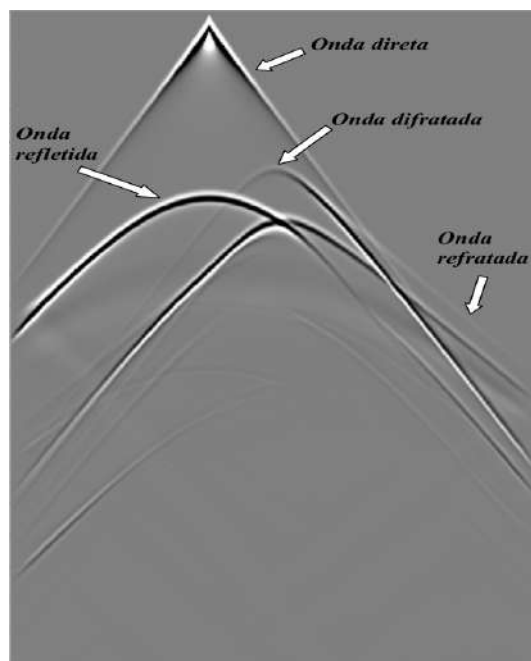


Figura A.0.2: Sismograma ilustrando eventos sísmicos: onda direta, onda refletida, onda refratada e onda difratada. Figura obtida em DA SILVA [17].

Através deste resultado, o geólogo pode identificar a existência de potenciais reservatórios, que é uma pequena área de toda a subsuperfície imageada. Técnicas de inversão na área alvo (como AVO<sup>1</sup> ou FWI) desempenham papel fundamental para fornecer informações petrofísicas das rochas, ao invés de somente informação estrutural. Camadas petrolíferas podem ser tanto finas (alguns centímetros) como de muitos metros (da ordem de dezenas de metros), portanto, é necessário uma caracterização precisa de alta resolução para identificação dos reservatórios.

A figura A.0.3 ilustra as etapas para localizar reservatórios de hidrocarbonetos através da sísmica. Em resumo, as etapas para se encontrar e eventualmente produzir campos de petróleo com tecnologia de imageamento sísmico inclui uma cadeia de passos, com propostas específicas:

- **Aquisição:** momento em que o dado deve ser adquirido. Isso é feito enviando campos de onda que atravessem a subsuperfície;
- **Processamento sísmico:** os dados provenientes da aquisição podem ser processados a fim de se obter uma imagem estrutural da área em questão (Migração Sísmica);

<sup>1</sup>Estudo conhecido como análise de variação da amplitude em relação ao afastamento fonte-receptor (AVO - *Amplitude versus Offset*) ou análise da variação da amplitude em relação ao ângulo (AVA - *Amplitude versus Angle*) OSTRANDER [50]. Esta técnica permite determinar parâmetros físicos através de inversão de curvas de variação do coeficiente de reflexão e o ângulo de incidência. Essas informações auxiliam na caracterização de reservatórios. Portanto, tem o mesmo propósito de FWI, que é obter parâmetros elásticos a fim de determinar características da rocha, como fluidos, porosidade, densidade, velocidade sísmica.



Figura A.0.3: O processo de encontrar reservatório de hidrocarboneto com imageamento sísmico inclui diversas etapas. Figura modificada de HAFFINGER [25].

- **Interpretação:** após os resultados do processamento sísmico, é possível identificar a existência ou não de formações rochosas que, dependendo do ambiente específico de deposição e estrutura, contém óleo e/ou gás;
- **Caracterização do reservatório:** são feitas análises mais aprofundadas da região alvo (reservatório), em que pode-se perfurar mais poços exploratórios e/ou algumas sísmicas mais dedicadas à área alvo a fim de se obter informações quantitativas sobre o alvo. Por fim, é feita a decisão se o campo pode ser produzido economicamente.
- **Monitoramento da produção:** procedimento realizado durante a produção. A sísmica 4D (sísmica 3D + *time-lapse*) é um dos métodos de monitoramento onde se verifica as alterações nas amplitudes no reservatório devido a substituição de fluido durante a vida de produção do campo.



# Apêndice B

## Modelagem Sísmica Computacional da Equação da Onda pelo Método das Diferenças Finitas

### B.1 Introdução

Este apêndice apresenta as aproximações numéricas utilizadas neste trabalho para realização das modelagens acústica e elástica nos domínios do tempo e da frequência. As modelagens sísmicas são empregadas tanto como fornecimento de dados sísmicos sintéticos de entrada, como também fazendo parte do próprio algoritmo da inversão.

Casos simples de propagação de ondas podem ser descritos por soluções analíticas exatas. Em situações mais complexas nos limites de baixas frequências ou baixos contrastes, aproximações de Born ou Rytov fornecem expressões exatas. Traçado de raio também é um tipo de aproximação amplamente utilizado em sísmica e é válido para altas frequências e corresponde à ótica geométrica. Para modelos relativamente simples o custo computacional das técnicas por traçado de raios é significativamente menor do que para os métodos de diferenças finitas (MDF). No entanto, no caso do traçado de raio o custo computacional aumenta para modelos mais complexos, enquanto o MDF é mantido.

O método numérico utilizado neste trabalho foi o método de diferenças finitas (MDF). O MDF é tradicionalmente empregado na realização de modelagens para descrição da propagação de ondas sísmicas, obtendo soluções aproximadas das equações diferenciais, além de possuir boa precisão, eficiência, codificação simples e fácil paralelização empregando técnicas de decomposição de domínio [2].

O MDF discretiza a equação da onda numa malha, substituindo as derivadas espaciais pelo operador de diferenças finitas usando pontos vizinhos. O campo de onda também é discretizado em tempo e o campo de onda para o passo de tempo seguinte é calculado expandindo-o em série de Taylor.

As discretização das equações da onda, tanto acústicas como elásticas, podem ser representadas como segue

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t) \quad (\text{B.1.1})$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}$  é um vetor coluna representando pressão ou deslocamento,  $\tilde{\mathbf{f}}$  é um vetor coluna representando a fonte,  $\mathbf{M}$  é a matriz massa,  $\mathbf{K}$  é a matriz rigidez. Esta equação inclui condições de contorno implícitas, é discretizada no espaço e contínuo no tempo (o símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  significa discretizado).

A Equação B.1.1 está expressa no domínio do tempo. A propagação de ondas sísmicas pode ser descrita tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência.

Aplicando a transformada de Fourier à Equação B.1.1, obtém-se a equação da onda no domínio da frequência, conhecida como equação de Helmholtz

$$\mathbf{K}\mathbf{u}(\omega) - \omega^2\mathbf{M}\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f}(\omega). \quad (\text{B.1.2})$$

onde

$$\mathbf{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{u}}(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbf{f}}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{B.1.3})$$

Neste trabalho não são apresentadas as equações da onda na forma discretizada. Nas seguintes subseções são apresentados termos essenciais que devem ser levados em consideração ao se tratar de modelagens sísmicas.

### B.1.1 Termo fonte

O propósito do termo fonte é simular a assinatura do sinal sísmico (*wavelet*). É conveniente que a função fonte possua algumas características especiais. Dentre estas, está o fato de que tal função deva ser limitada tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. A limitação no domínio do tempo tem o intuito de simular uma fonte explosiva e a limitação no domínio da frequência tem por objetivo manter o controle sobre as frequências do sinal gerado e registrado pelas estações receptoras. Para a presente análise, a função fonte designada foi a derivada segunda da Gaussiana, conhecida como fonte Ricker:

$$f(t) = \left[ 1 - 2\pi(\pi f_c t_d)^2 e^{-[\pi(\pi f_c t_d)^2]} \right] \quad (\text{B.1.4})$$

onde  $t_d = t - \frac{2\sqrt{\pi}}{f_c}$  representa uma translação temporal da fonte no tempo (tempo defasado), sendo  $t$  o tempo, em que a frequência central  $f_c$  e a frequência de corte (ou máxima)  $f_{corte}$  estão relacionadas através da equação:

$$f_{corte} = 3\sqrt{\pi}f_c. \quad (\text{B.1.5})$$

No caso no domínio da frequência, a fonte é dada pela transformada de Fourier sobre a expressão da fonte sísmica no domínio do tempo (Equação B.1.4)

$$|F(\omega)| = \frac{\omega^2}{2\pi^4 f_c^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\pi^3 f_c^2}\right) \quad (\text{B.1.6})$$

onde  $\omega$  é a frequência angular.

### B.1.2 Condições de dispersão e estabilidade

É importante, em ambos domínios, sempre realizar uma análise de dispersão numérica e, no caso do domínio do tempo, também deve ser feito uma análise de estabilidade. Para maiores detalhes, ver [44].

A dispersão numérica é causada em virtude das aproximações realizadas pelo método numérico. Para controlar a dispersão numérica na modelagem, existe uma relação entre a menor velocidade  $v_{min}$  utilizada no modelo de parâmetros e a frequência máxima  $f_{corte}$  que limita o máximo valor do espaçamento da malha  $h$  para não se ter excessiva dispersão de energia

$$h \leq \frac{1}{\alpha} \frac{v_{min}}{f_{corte}} \quad (\text{B.1.7})$$

e a estabilidade é computada da seguinte forma

$$\Delta t \leq \frac{1}{\beta} \frac{h}{v_{max}} \quad (\text{B.1.8})$$

onde  $h$  é o espaçamento entre os pontos da malha (neste trabalho,  $h$  é o mesmo nas direções vertical e horizontal).  $\Delta t$  é o intervalo de tempo de registro.  $f_{corte}$  é a frequência máxima utilizada.  $\alpha$  representa o número de pontos da malha por comprimento de onda, onde se considera o menor comprimento de onda referente à menor velocidade presente no meio. O valor ótimo de  $\alpha$  vai depender do esquema de modelagem numérica.  $\beta$  representa a quantidade de intervalos de tempo necessários para que a frente de onda percorra uma distância equivalente ao espaçamento entre os pontos da malha.  $v_{max}$  e  $v_{min}$  são respectivamente as velocidades máxima e mínima no modelo de velocidades em questão. Ressalta-se que no caso elástico, deve-se considerar como  $v_{min}$  a menor velocidade do modelo de  $v_s$ .

Nas seções seguintes, são apresentados os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  especificamente para

cada um dos três métodos de modelagem (acústico e elástico no tempo e acústico na frequência) utilizados.

### B.1.3 Condições de contorno e de borda

Num determinado domínio numérico é necessário a determinação de condições de contorno e inicial (problema de valor inicial e de valor de contorno) para que a equação diferencial parcial apresente solução única. No caso da Geofísica, estas são dadas por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{B.1.9})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (\text{B.1.10})$$

São dois tipos de condições de contorno classicamente utilizadas: condições essenciais (de Dirichlet), com valor de campo prescrito, e condições naturais (de Neumann), como valor da derivada do campo prescrita, ou seja,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u, \quad (\text{B.1.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = \bar{\mathbf{q}} \quad \text{em } \Gamma_q. \quad (\text{B.1.12})$$

onde  $\bar{\mathbf{p}}$  e  $\bar{\mathbf{q}}$  são os valores do campo de ondas e de sua derivada em relação à  $\mathbf{n}$  (vetor unitário perpendicular ao contorno) prescritos, respectivamente, nos contornos  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_q$ .

A aplicação de tais condições de fronteira neste contexto faz com que a onda sísmica incidente sobre tais fronteiras seja refletida. Sabendo que a Terra é heterogênea e contínua, a simulação da propagação do campo de onda com duração infinita teria um custo computacional proibitivo. Para simular problemas de meios que representem a subsuperfície terrestre contendo domínios infinitos ou semi-infinitos, e a fim de minimizar tais reflexões que são indesejáveis, deve-se aplicar as condições de bordas não reflexivas, ou condições de contorno absorventes. Os tipos específicos de bordas utilizadas para cada modelagem utilizadas para esta análise estão descritas em suas respectivas seções.

## B.2 Modelagens no domínio do tempo

Nesta seção são apresentados os critérios de modelagem para a propagação de ondas no domínio do tempo, em meios elásticos e acústicos isotrópicos. Para tal, foi utilizado o MDF com aproximações de quarta ordem espacial e segunda ordem temporal. Também são apresentadas as equações de movimento combinadas ao tensor-deformação, que descreve o comportamento do material. Esta combinação permite a descrição de características da subsuperfície do ponto de vista dos campos

de onda sísmicos. Uma boa referência para este estudo é o Capítulo 2 do livro IKELLE e AMUNDSEN [29].

Quanto às condições de borda neste domínio, foram utilizadas duas bordas neste domínio, sendo uma proposta por REYNOLDS [61] e outra complementar proposta por CERJAN *et al.* [14]. A borda de Reynolds é baseada na hipótese de que os limites dos modelos estão suficientemente distantes da fonte sísmica de forma que as frentes de onda nestes pontos podem ser consideradas como ondas planas. A borda de Cerjan simula um amortecimento com um decaimento exponencial ao longo da espessura da borda.

### B.2.1 Modelagem elástica

Para a modelagem elástica foi utilizado o esquema de malha intercalada implementado é o apresentado por VIRIEUX [78]-LEVANDER [38], com aproximação de quarta ordem espacial e segunda ordem temporal. Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  neste caso são respectivamente 5 e 0,606 [38].

#### Equação da onda elástica (meio isotrópico):

As equações elastodinâmicas são representadas como segue:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.2.1})$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (\text{B.2.2})$$

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{B.2.3})$$

$$\tau_{zz} = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \quad (\text{B.2.5})$$

onde  $i, j = x, z$ ,  $\rho$  é a densidade,  $u_j$  são os campos deslocamentos,  $\tau_{ij}$  são as tensões,  $\lambda$  (módulo de rigidez) e  $\mu$  (módulo de cisalhamento) são os parâmetros de Lamé.

O trabalho do VIRIEUX [78] contempla uma correção da modelagem elástica para interface entre fluido e sólido. Ao invés de usar a equação da onda acima, que é um sistema hiperbólico de segunda ordem, o sistema é transformado num sistema hiperbólico de primeira ordem:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (\text{B.2.6})$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (\text{B.2.7})$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.2.8})$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{B.2.9})$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right). \quad (\text{B.2.10})$$

Incluindo fontes nas equações de movimento e lei de Hooke, um sistema de fontes sísmicas pode ser representado por uma força, denotada por  $F_i$  e/ou por uma distribuição de tensão, denotada pelo tensor  $-I_{ij}$ . Sendo as fontes não nulas, as equações de movimento podem ser modificadas como segue:

$$\frac{\partial \tau_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = c_{ijkl}(\mathbf{x}) \frac{\partial \epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \underbrace{\frac{\partial I_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}}_{\text{termo fonte} \rightarrow \text{fonte de tensão}}$$

$$\begin{aligned} I_{ij} &= K i_v \delta_{ij} \\ F_1 &= F_2 = F_3 = 0 \end{aligned}$$

onde  $c_{ijkl}$  é o tensor de propriedades elásticas,  $\epsilon_{ij}$  o tensor deformação,  $\delta_{ij}$  é a função delta de Kronecker,  $i_v$  é a densidade de volume de injeção de volume e  $K$  o módulo de Bulk. A formulação da equação da onda 2D  $P$ - $SV$  fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= b(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + F_x \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} &= b(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + F_z \\ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} &= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} &= \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial v_x}{\partial x} + (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x})) \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} &= \mu(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

onde  $v_x$  e  $v_z$  são as velocidades das partículas horizontal e vertical e  $b = \frac{1}{\rho}$  a flutuação. As duas primeiras equações são a equação de movimento. As últimas três são a Lei de Hooke depois de derivar com relação ao tempo. A Figura B.2.1 ilustra a malha intercalada de Virieux-Levander.

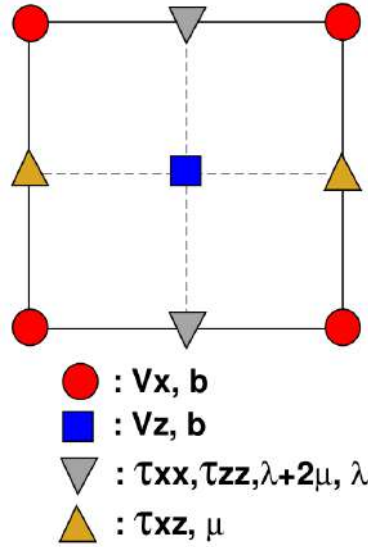


Figura B.2.1: Geometria da malha intercalada para o estêncil de Virieux-Levander.

A relação entre os parâmetro de Lamé  $(\lambda, \mu, \rho)$  com  $(v_p, v_s)$  são:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (\text{B.2.11})$$

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (\text{B.2.12})$$

Onde  $v_p$  é a velocidade de propagação da onda primária, que se propaga no meio comprimindo e dilatando as partículas ao longo da trajetória da onda, também conhecida como onda longitudinal ou compressional e,  $v_s$ , é a onda secundária, mais lenta que a primária, que se propaga movimentando as partículas transversalmente à trajetória da onda, conhecida como onda cisalhante. Esta última não se propaga em fluidos.

## B.2.2 Modelagem acústica

A modelagem acústica foi feita com malha simples e regular, como em KELLY *et al.* [33]. Com relação a aproximação no MDF foi implementado quarta ordem espacial e segunda ordem temporal, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  foram, respectivamente 5 e 0,612 [39].

### Equação da onda acústica (meio isotrópico):

No caso de um meio acústico,  $\mu = 0$  e  $V_s = 0$  e as tensões são

$$\tau_{xx} = \tau_{zz} = -p \quad (\text{B.2.13})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \quad (\text{B.2.14})$$

A equação da onda acústica no sistema de primeira ordem no tempo se escreve como:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \quad (\text{B.2.15})$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z, \quad (\text{B.2.16})$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\lambda \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + I.$$

Já a equação de segunda ordem no tempo pode ser escrita inteiramente em termos do campo de pressão  $p$ . Para isso, dividimos por  $\rho$  as Equações B.2.15:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} f_x, \quad (\text{B.2.17})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho} f_z, \quad (\text{B.2.18})$$

derivar em relação a  $(x, z)$  as Equações B.2.17-B.2.18, e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} f_x \right), \quad (\text{B.2.19})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho} f_z \right), \quad (\text{B.2.20})$$

somamos as Equações B.2.19-B.2.20

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} f_i \right) \quad (\text{B.2.21})$$

e utilizamos as identidades  $\lambda = v_p^2 \rho$  e

$$p = -\lambda \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \int_0^t I(t) dt \quad (\text{B.2.22})$$

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho v_p^2} p + \frac{1}{\rho v_p^2} \int_0^t I(t) dt \quad (\text{B.2.23})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( -\frac{1}{\rho v_p^2} p + \frac{1}{\rho v_p^2} \int_0^t I(t) dt \right) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho} f_i \right) \quad (\text{B.2.24})$$

para chegar a expressão final

$$\frac{1}{\rho v_p^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \vec{f} \right) + \frac{1}{\rho v_p^2} \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (\text{B.2.25})$$

Representando esta equação com densidade constante em uma forma mais geral, a



equação da onda é representada como

$$\frac{1}{v_p^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) + f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s) \quad (\text{B.2.26})$$

onde  $f(t)$  é o termo fonte no domínio do tempo,  $\delta$  é o operador Delta de Dirac e  $\mathbf{x}^s$  são as coordenadas espaciais do ponto de colocação da fonte.

## B.3 Modelagem acústica no domínio da frequência

No domínio da frequência, a equação da onda na sua versão discreta corresponde a um sistema de equações lineares que relaciona o campo de ondas em todos os pontos do domínio computacional (vetor solução) com o termo fonte e as propriedades elásticas que caracterizam o meio de propagação. Neste domínio é necessário resolver sistemas lineares e, para isso, foram utilizadas sub-rotinas da biblioteca Lapack, as quais são específicas para problemas contendo matrizes esparsas do tipo banda com coeficientes não nulo complexos.

Na modelagem acústica no domínio da frequência foi utilizada uma aproximação realizada através de uma combinação linear dos operadores de derivada aproximados pelo MDF no sistema de coordenadas Cartesiano convencional e no sistema de coordenadas rotacionado de  $45^\circ$ , conhecida (*mixed-grid method*) proposta por JO *et al.* [32] e HUSTEDT *et al.* [28]. JO *et al.* [32] desenvolveram um esquema otimizado de diferenças finitas de 9 pontos. As derivadas espaciais são de segunda ordem nos dois sistemas de coordenadas, combinado com a estratégia de aproximação do termo de aceleração de massa, em que o termo massa é espacialmente distribuído sobre os diferentes pontos do estêncil de 9 pontos. A combinação dessas duas técnicas permite o desenvolvimento de um operador de diferenças compacto e preciso em termos de dispersão e anisotropia numéricas.

Segundo JO *et al.* [32] o valor ótimo de  $\alpha$  encontrado para o esquema compacto de 9 pontos é 4. No domínio da frequência não se utiliza a condição de estabilidade.

Com relação às bordas, foi empregado o método de camadas absorventes com acoplamento perfeito PML (*Perfectly Matched Layers*), proposta por BERENGER [5].

### B.3.1 Equação da onda acústica (meio isotrópico):

Para se obter a equação acústica da onda no domínio da frequência, basta aplicar a transformada de Fourier temporal na equação B.2.26, e obtém-se

$$\frac{\omega^2}{v_p^2(\mathbf{x})} = \nabla^2 p(\mathbf{x}, \omega) + F(\omega) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^s). \quad (\text{B.3.1})$$

onde  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular e  $F(\omega)$  é o termo fonte no domínio da frequência. Esta equação é também conhecida como equação de Helmholtz.

## Apêndice C

# Transformação de propriedades da Hessiana completa

A mudança de parametrização para a Hessiana completa pode ser calculada pelo uso da regra da cadeia duas vezes:

$$(\nabla^2 \bar{E}(\mathbf{q}))_{mn} = \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial q_m \partial q_n} = \frac{\partial}{\partial q_m} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial E}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_n} \right) \quad (\text{C.0.1a})$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial q_m} \frac{\partial^2 E}{\partial p_i \partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_n} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial E}{\partial p_j} \frac{\partial^2 p_j}{\partial q_m \partial q_n} \quad (\text{C.0.1b})$$

$$= (J^T \nabla^2 E(\mathbf{p}) J + J_{(2)} \cdot \nabla E(\mathbf{p}))_{mn} \quad (\text{C.0.1c})$$

onde

$$(J_{(2)})_{mn}^j = \frac{\partial^2 p_j}{\partial q_m \partial q_n}. \quad (\text{C.0.2})$$

é um termo não nulo quando a transformação de parâmetros é não linear. Portanto, pode-se concluir que a Hessiana completa possui as mesmas propriedades de transformação que a Hessiana aproximada se o termo não linear  $J_{(2)}$  desaparece.

# Apêndice D

## Caso elástico isotrópico 3D

A formulação e aplicação numérica considerada no texto principal é um caso isotrópico 2D. Neste apêndice são avaliadas as direções de atualização propostas para o caso 3D isotrópico. Em 3D, o tensor de conformidade é dado por

$$S_{ij}(a', b) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}a' + \frac{1}{3}b & \frac{1}{9}a' - \frac{1}{6}b & \frac{1}{9}a' - \frac{1}{6}b & & & \\ \frac{1}{9}a' - \frac{1}{6}b & \frac{1}{9}a' + \frac{1}{3}b & \frac{1}{9}a' - \frac{1}{6}b & & & \\ \frac{1}{9}a' - \frac{1}{6}b & \frac{1}{9}a' - \frac{1}{6}b & \frac{1}{9}a' + \frac{1}{3}b & & & \\ & & & b & & \\ & & & & b & \\ & & & & & b \end{pmatrix}. \quad (\text{D.0.1})$$

onde se utiliza os parâmetros auxiliares

$$a' = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}, \quad b = \frac{1}{\mu}. \quad (\text{D.0.2})$$

O gradiente para  $a' = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu}$  é

$$\nabla_{a'} E = \int_T dt \frac{1}{9} \frac{\partial}{\partial t} (\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) (\tau_{xx}^\dagger + \tau_{yy}^\dagger + \tau_{zz}^\dagger) \quad (\text{D.0.3})$$

O gradiente para  $b = \frac{1}{\mu}$  é

$$\begin{aligned}\nabla_b E = \int_T dt \left[ -\frac{1}{6} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \right) (\tau_{xx}^\dagger + \tau_{yy}^\dagger + \tau_{zz}^\dagger) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} \tau_{xx}^\dagger + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial t} \tau_{yy}^\dagger + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \tau_{zz}^\dagger \right) \right. \\ \left. + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} \tau_{xy}^\dagger + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} \tau_{xz}^\dagger + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial t} \tau_{yz}^\dagger \right].\end{aligned}\quad (\text{D.0.4})$$

Para os gradientes para a parametrização  $(v_p, v_s, \rho)$  deve-se utilizar a matriz Jacobiana de transformação de variável, que é dada por

$$J_{\{a', b, \rho\} \rightarrow \{v_p, v_s, \rho\}} = \frac{\partial (a', b, \rho)}{\partial (v_p, v_s, \rho)}.\quad (\text{D.0.5})$$

Portanto, o Jacobiano transposto é dado por

$$J^T = \begin{pmatrix} -\frac{2v_p}{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2)^2 \rho} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{8}{3}v_s}{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2)^2 \rho} & -\frac{2}{v_s^3 \rho} & 0 \\ -\frac{1}{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2) \rho^2} & -\frac{1}{v_s^2 \rho^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, os gradientes em termos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  pelo Jacobiano transposto são

$$\nabla_{v_p} E = -\frac{2v_p}{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2)^2 \rho} \nabla_{a'} E \quad (\text{D.0.6a})$$

$$\nabla_{v_s} E = \frac{\frac{8}{3}v_s}{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2)^2 \rho} \nabla_{a'} E - \frac{2}{v_s^3 \rho} \nabla_b E, \quad (\text{D.0.6b})$$

$$\nabla_\rho E = -\frac{1}{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2) \rho^2} \nabla_{a'} E - \frac{1}{v_s^2 \rho^2} \nabla_b E + \nabla_\rho E. \quad (\text{D.0.6c})$$

As expressões (D.0.6a) e (D.0.6b) coincidem com a Equação 24 apresentada por VIGH *et al.* [77].

O inverso do Jacobiano é dado por,

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(v_p^2 - \frac{4}{3}v_s^2)^2}{2\rho} & -\frac{2v_s^4 \rho}{3v_p} & -\frac{v_p}{2\rho} \\ 0 & \frac{\rho v_s^3}{2} & -\frac{v_s}{2\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.0.7})$$

A Equação (D.0.7) pode ser usada para avaliar as direções de atualização propostas (5.3.7d).

# Apêndice E

## Parâmetros e resultados complementares do Capítulo 6

Este apêndice ilustra as tabelas 75 casos de inversão e resultados de inversão de monoparâmetros para cada componente do Capítulo 6.

### E.1 Tabelas dos 75 casos de inversão

As Tabelas E.1-E.15 ilustram os 75 casos de inversão, indicando os modelos perturbados na modelagem, os modelos resultantes da inversão e o dado observado para a inversão.

Tabela E.1: Inversão para o caso de modelagem 1 com perturbação do modelo de  $v_p$  e modelo resultante da inversão  $v_p$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
1	$v_p$	$v_p$	P
2	$v_p$	$v_p$	V <sub>Z</sub>
3	$v_p$	$v_p$	P e V <sub>Z</sub>
4	$v_p$	$v_p$	V <sub>X</sub>
5	$v_p$	$v_p$	P, V <sub>Z</sub> e V <sub>X</sub>

Tabela E.2: Inversão para o caso de modelagem 2 com perturbação do modelo de  $v_s$  e modelo resultante da inversão  $v_s$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
6	$v_s$	$v_s$	P
7	$v_s$	$v_s$	V <sub>Z</sub>
8	$v_s$	$v_s$	P e V <sub>Z</sub>
9	$v_s$	$v_s$	V <sub>X</sub>
10	$v_s$	$v_s$	P, V <sub>Z</sub> e V <sub>X</sub>

Tabela E.3: Inversão para o caso de modelagem 3 com perturbação do modelo de  $\rho$  e modelo resultante da inversão  $\rho$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
11	$\rho$	$\rho$	P
12	$\rho$	$\rho$	Vz
13	$\rho$	$\rho$	P e Vz
14	$\rho$	$\rho$	Vx
15	$\rho$	$\rho$	P, Vz e Vx

Tabela E.4: Inversão para o caso de modelagem 4 com perturbação dos modelos de  $v_p$  e  $v_s$  e modelo resultante da inversão  $v_p$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
16	$v_p$ e $v_s$	$v_p$	P
17	$v_p$ e $v_s$	$v_p$	Vz
18	$v_p$ e $v_s$	$v_p$	P e Vz
19	$v_p$ e $v_s$	$v_p$	Vx
20	$v_p$ e $v_s$	$v_p$	P, Vz e Vx

Tabela E.5: Inversão para o caso de modelagem 4 com perturbação dos modelos de  $v_p$  e  $v_s$  e modelo resultante da inversão  $v_s$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
21	$v_p$ e $v_s$	$v_s$	P
22	$v_p$ e $v_s$	$v_s$	Vz
23	$v_p$ e $v_s$	$v_s$	P e Vz
24	$v_p$ e $v_s$	$v_s$	Vx
25	$v_p$ e $v_s$	$v_s$	P, Vz e Vx

Tabela E.6: Inversão para o caso de modelagem 4 com perturbação dos modelos de  $v_p$  e  $v_s$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$  e  $v_s$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
26	$v_p$ e $v_s$	$v_p$ e $v_s$	P
27	$v_p$ e $v_s$	$v_p$ e $v_s$	Vz
28	$v_p$ e $v_s$	$v_p$ e $v_s$	P e Vz
29	$v_p$ e $v_s$	$v_p$ e $v_s$	Vx
30	$v_p$ e $v_s$	$v_p$ e $v_s$	P, Vz e Vx

Tabela E.7: Inversão para o caso de modelagem 5 com perturbação dos modelos de  $v_p$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
31	$v_p$ e $\rho$	$v_p$	P
32	$v_p$ e $\rho$	$v_p$	Vz
33	$v_p$ e $\rho$	$v_p$	P e Vz
34	$v_p$ e $\rho$	$v_p$	Vx
35	$v_p$ e $\rho$	$v_p$	P, Vz e Vx

Tabela E.8: Inversão para o caso de modelagem 5 com perturbação dos modelos de  $v_p$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $\rho$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
36	$v_p$ e $\rho$	$\rho$	P
37	$v_p$ e $\rho$	$\rho$	Vz
38	$v_p$ e $\rho$	$\rho$	P e Vz
39	$v_p$ e $\rho$	$\rho$	Vx
40	$v_p$ e $\rho$	$\rho$	P, Vz e Vx

Tabela E.9: Inversão para o caso de modelagem 5 com perturbação dos modelos de  $v_p$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$  e  $\rho$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
41	$v_p$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	P
42	$v_p$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	Vz
43	$v_p$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	P e Vz
44	$v_p$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	Vx
45	$v_p$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	P, Vz e Vx

Tabela E.10: Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão  $v_p$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
46	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$	P
47	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$	Vz
48	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$	P e Vz
49	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$	Vx
50	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$	P, Vz e Vx



Tabela E.11: Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão  $v_s$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
51	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_s$	P
52	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_s$	Vz
53	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_s$	P e Vz
54	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_s$	Vx
55	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_s$	P, Vz e Vx

Tabela E.12: Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão  $\rho$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
56	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$\rho$	P
57	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$\rho$	Vz
58	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$\rho$	P e Vz
59	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$\rho$	Vx
60	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$\rho$	P, Vz e Vx

Tabela E.13: Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$  e  $v_s$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
61	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $v_s$	P
62	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $v_s$	Vz
63	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $v_s$	P e Vz
64	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $v_s$	Vx
65	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $v_s$	P, Vz e Vx

Tabela E.14: Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$  e  $\rho$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
66	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	P
67	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	Vz
68	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	P e Vz
69	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	Vx
70	$v_p$ , $v_s$ e $\rho$	$v_p$ e $\rho$	P, Vz e Vx

Tabela E.15: Inversão para o caso de modelagem 6 com perturbação dos modelos de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$  e modelos resultantes da inversão simultânea de  $v_p$ ,  $v_s$  e  $\rho$ .

Inversão	Perturbação	Parâmetros de inversão	Dado observado
71	$v_p, v_s$ e $\rho$	$v_p, v_s$ e $\rho$	P
72	$v_p, v_s$ e $\rho$	$v_p, v_s$ e $\rho$	Vz
73	$v_p, v_s$ e $\rho$	$v_p, v_s$ e $\rho$	P e Vz
74	$v_p, v_s$ e $\rho$	$v_p, v_s$ e $\rho$	Vx
75	$v_p, v_s$ e $\rho$	$v_p, v_s$ e $\rho$	P, Vz e Vx

## E.2 Resultados monoparâmetros

Os resultados para a inversão de monoparâmetro foram subdivididos em cinco partes, dependendo da escolha do dado de entrada para a inversão, ou seja, pela combinação de dados registrados por diferentes componentes. A escolha do dado de entrada foi dividido nos seguinte casos:

- Caso 1: apenas a componente de pressão  $P$ ,
- Caso 2: apenas a componente vertical de velocidade  $Vz$ ,
- Caso 3: apenas a componente horizontal de velocidade  $Vx$ ,
- Caso 4: duas componentes  $P$  e  $Vz$ ,
- Caso 5: três componentes  $P$ ,  $Vz$  e  $Vx$ .

Destas figuras, a coluna 1 corresponde aos resultados dos modelos de  $v_p$ , a coluna 2 de  $v_s$  e a coluna 3 de  $\rho$ . Em (a), (b) e (c) são casos que utilizam, respectivamente, dados de modelagens 1, 2 e 3, com apenas um modelo de perturbação, conforme ilustrado na Tabela 6.1. Em (d), (e), (f) e (g) são, respectivamente, dados das modelagens 4, 4, 5 e 5 (modelagens com duas perturbações) e (h), (i) e (j), utilizaram dados da modelagem 6, que utiliza os três modelos de perturbação ( $v_p, v_s$  e  $\rho$ ).

Os resultados monoparâmetros para cada componente estão ilustrados nas Figuras E.2.1-E.2.5.

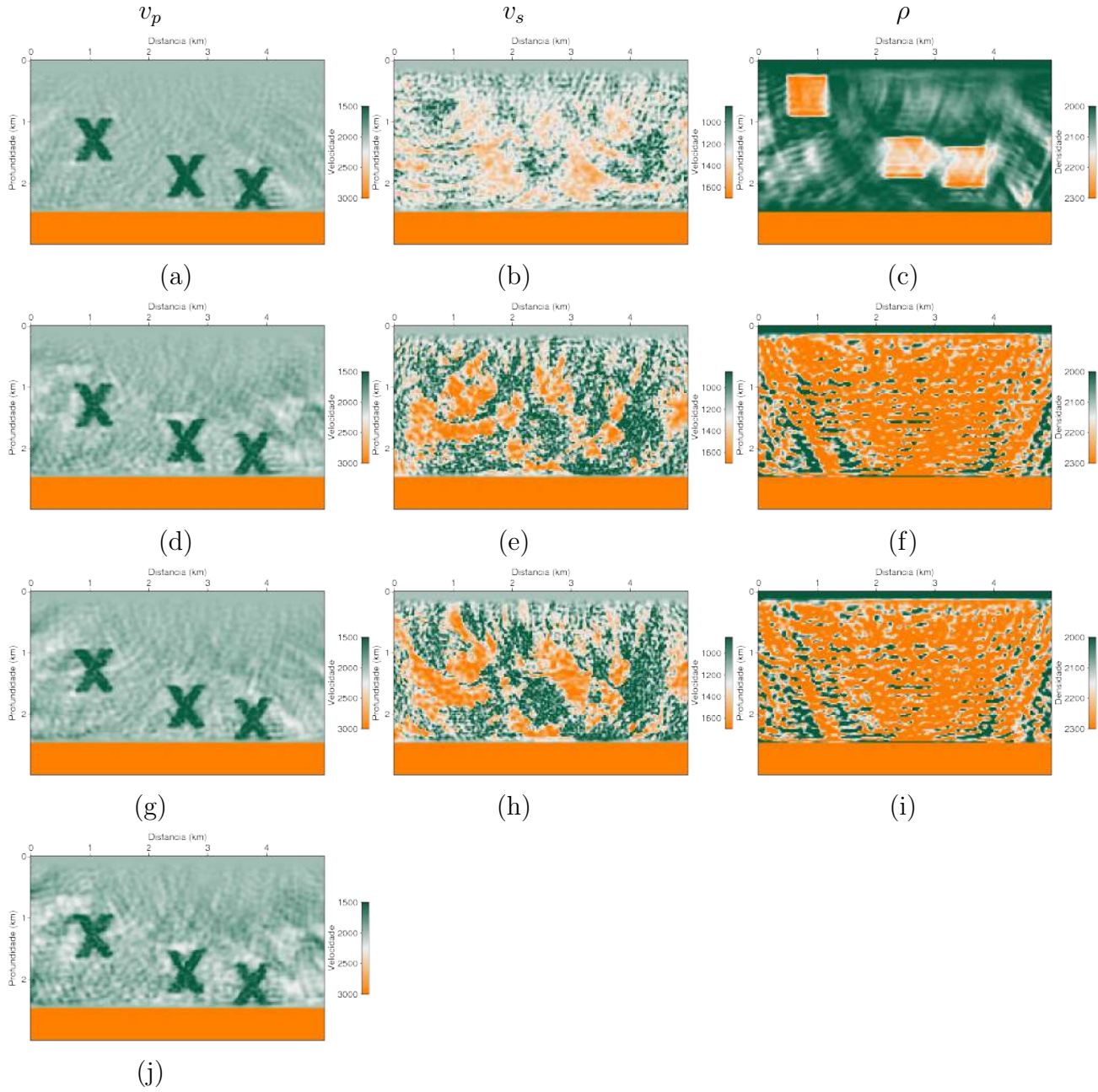


Figura E.2.1: Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando a componente  $P$  como dado observado. A coluna 1 corresponde às inversões de  $v_p$ , a coluna 2 de  $v_s$  e a coluna 3 de  $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de  $v_s$  com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de  $\rho$  com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1.

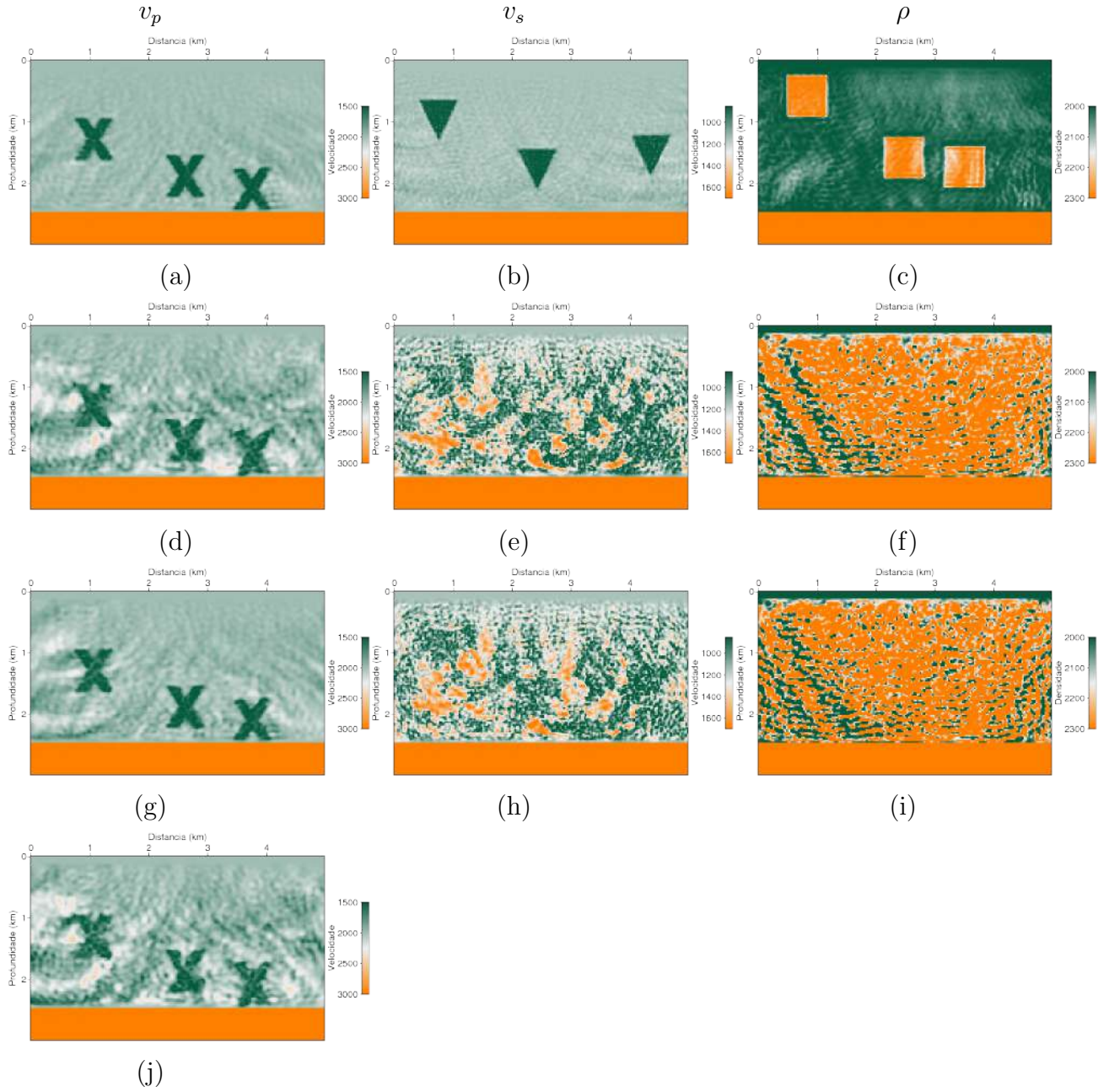


Figura E.2.2: Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando a componente  $V_z$  como dado observado. A coluna 1 corresponde a inversões de  $v_p$ , a coluna 2 de  $v_s$  e a coluna 3 de  $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de  $v_s$  com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de  $\rho$  com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1.



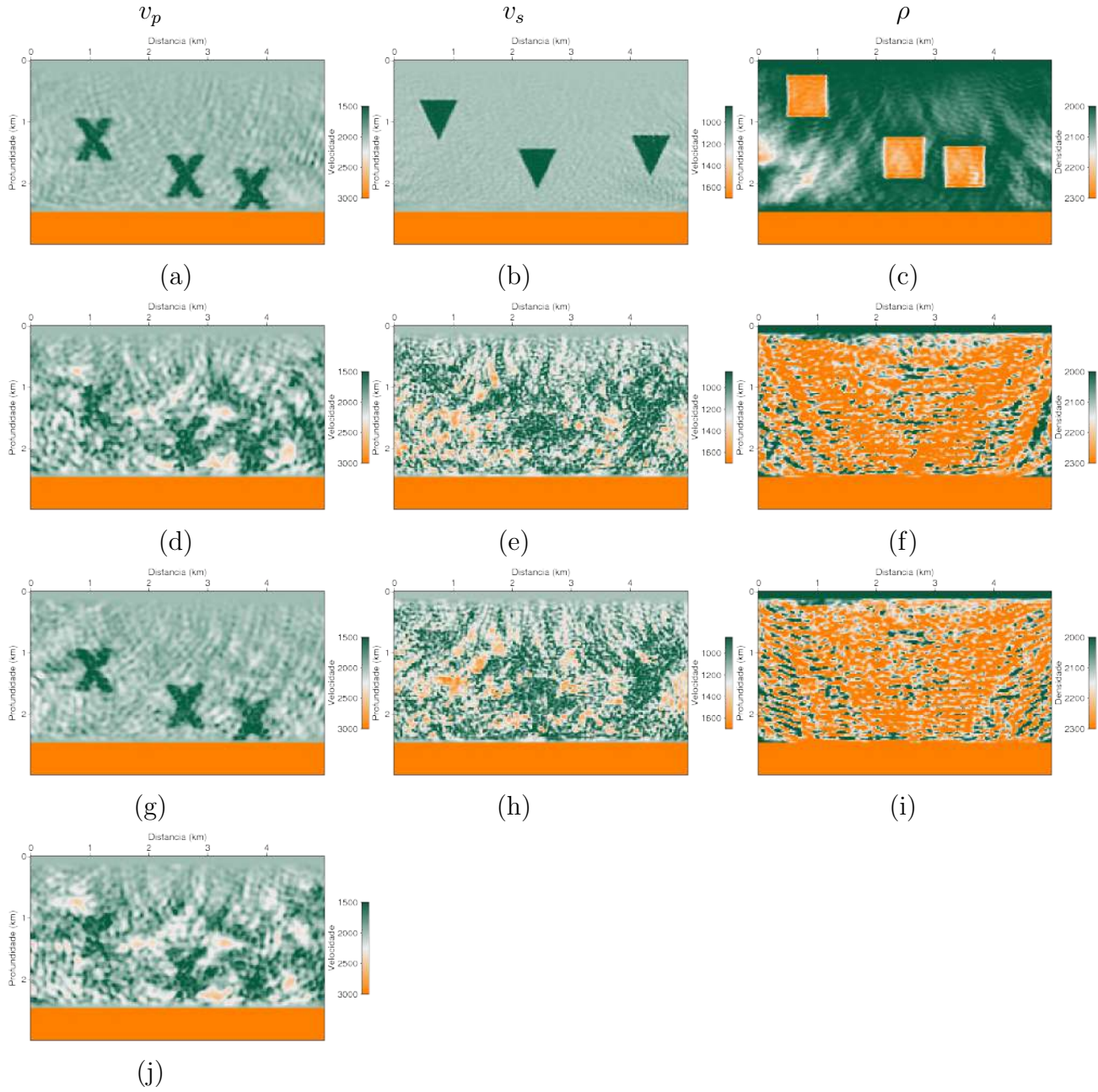


Figura E.2.3: Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando a componente  $V_x$  como dado observado. A coluna 1 corresponde a inversões de  $v_p$ , a coluna 2 de  $v_s$  e a coluna 3 de  $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de  $v_s$  com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de  $\rho$  com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1.

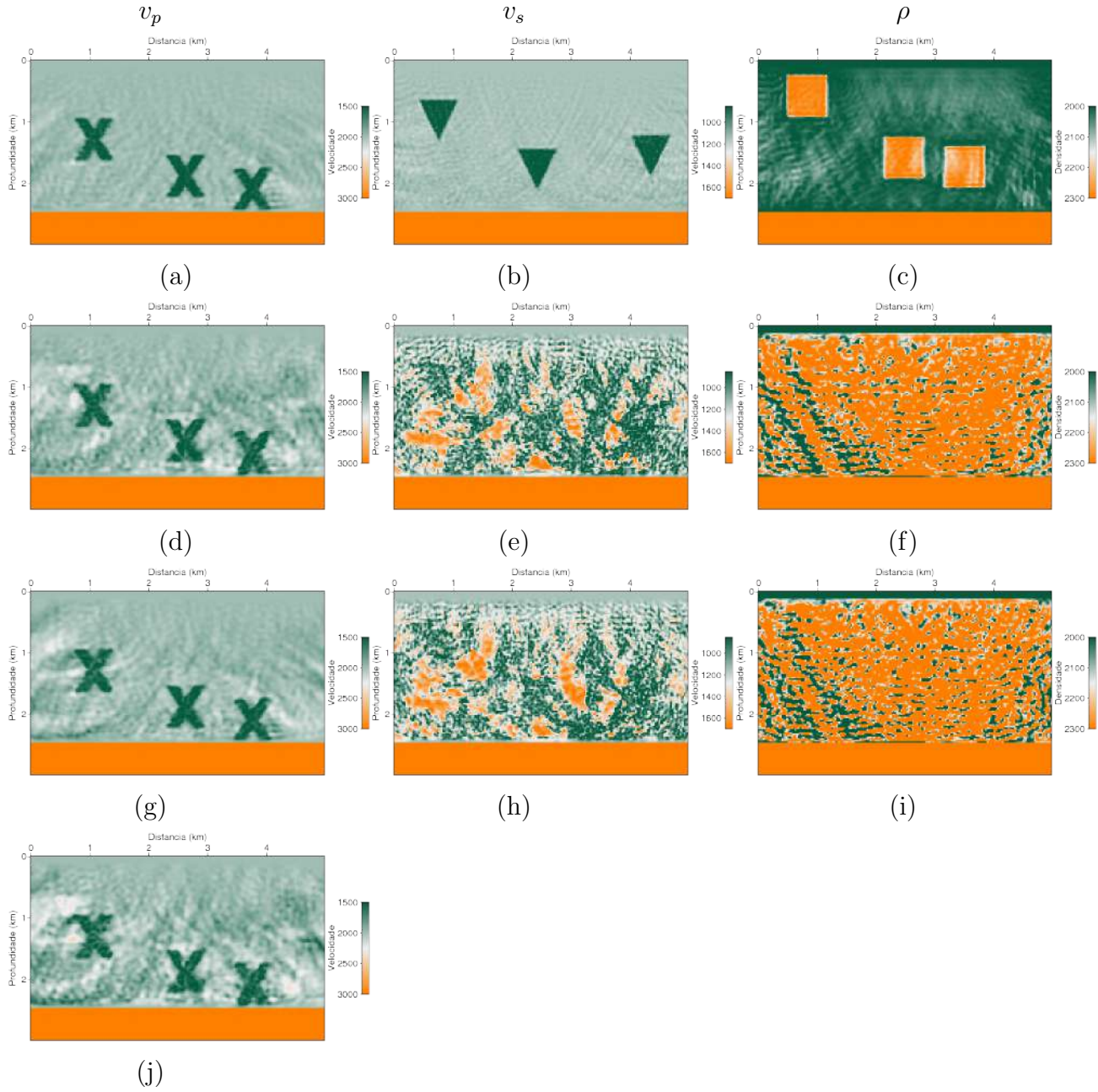


Figura E.2.4: Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando as componentes  $P$  e  $V_z$  como dados observados. A coluna 1 corresponde a inversões de  $v_p$ , a coluna 2 de  $v_s$  e a coluna 3 de  $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de  $v_s$  com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de  $\rho$  com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1.

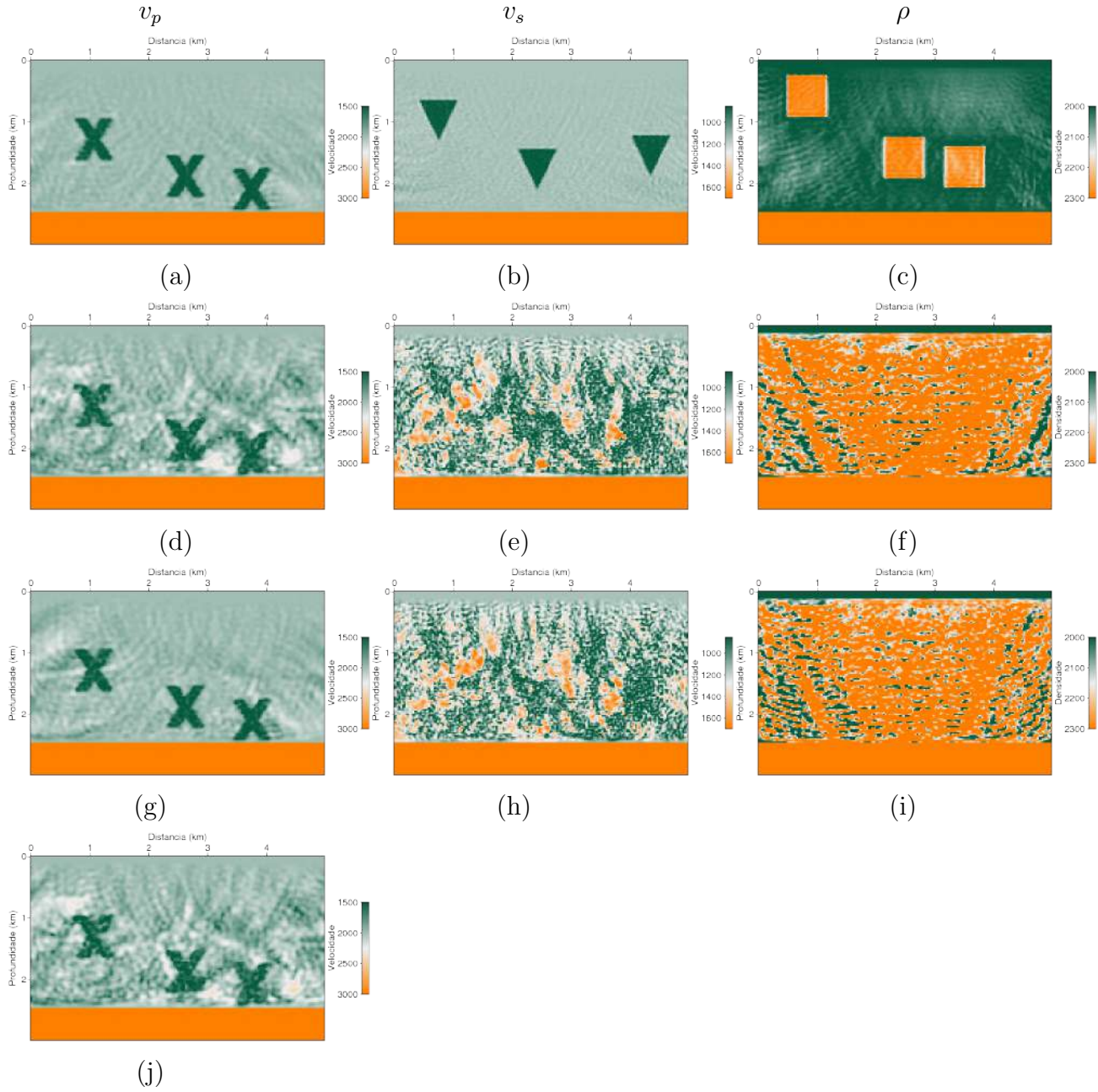


Figura E.2.5: Resultados da inversão para um modelo de parâmetro utilizando as componentes  $P$ ,  $V_z$  e  $V_x$  como dados observados. A coluna 1 corresponde a inversões de  $v_p$ , a coluna 2 de  $v_s$  e a coluna 3 de  $\rho$ . Em (a), (d), (g) e (j) são resultados das inversões com as modelagens 1, 4, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1; em (b), (e) e (h) inversão de  $v_s$  com as modelagens 2, 4 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1, em (c), (f) e (i) inversão de  $\rho$  com as modelagens 3, 5 e 6 respectivamente, conforme descrito na Tabela 6.1.